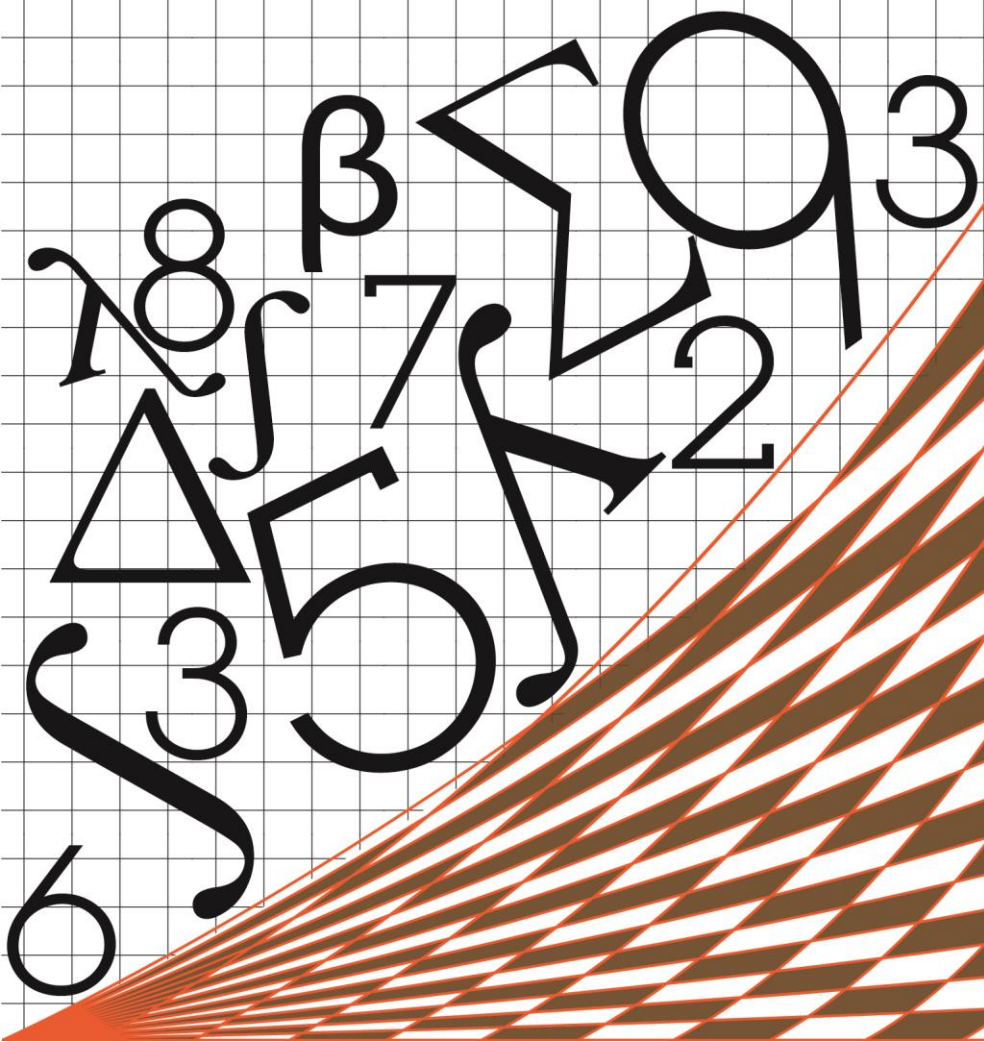
Cálculo Integral

wilton oltmanns



Introducción

Este manual de cálculo integral y series es una ayuda preparada para los estudiantes que tienen que cursar esta materia y para los amantes de las matemáticas. En este se empieza con una retroalimentación al cálculo diferencial con el objetivo de reforzar los conocimientos principalmente de límites y derivadas.

Entre los contenidos se encuentran tiene: Diferencia entre calculo Diferencial e integral, Derivación logarítmica, derivadas por formulas, formas indeterminadas y límites por la Regla de L°Hoppital , historia del cálculo integral, primitiva de una función, integral definida e indefinida, Resolución de integrales inmediatas, integrales por el método de sustitución, integrales trigonométricas, Integrales por identidades trigonométricas, integrales por partes, integrales cíclicas, método tabular, integrales de potencias de la distintas funciones trigonométricas, integrales de ángulos distintos, método de sustitución trigonométrica inversa, integración por tabla, integrales que contienen polinomios cuadráticos, método de fracciones parciales, método de Heaviside, integración de funciones racionales de seno y coseno, Integrales con valor absoluto, sumatoria y propiedades, estimación de áreas , sumas de Riemann, Reglas de Simpson, Reglas del trapecio, integral definida, Teoremas fundamentales del cálculo, áreas entre curvas, integrales impropias, integrales convergentes y divergentes, volumen de sólidos de revolución, método de los discos, método de las arandelas, series, serie de Maclaurin, serie de Taylor y serie de Fourier.

Al final de cada unidad hay actividades de ejercicios para que el lector se pueda ejercite. Se espera que este manual sea de mucha ayuda.

Wilton Oltmanns

Revisado el 18 de enero del 2015

www.elsolucionario.org

C á l c u l o

El cálculo elemental incluye dos procesos que son fundamentales en el análisis matemático:

- **El cálculo diferencial:** Estudia el cambio que hay en las funciones. Define la pendiente de la recta tangente de la función en un punto determinado.

- **El cálculo Integral:** Permite hallar el área de figuras curvas las cuales se forman por regiones limitadas por funciones continuas.

Definición y propiedades de la* función *logaritmo natural.

La función logaritmo natural se define como $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, x > 0$.

Propiedades de los logaritmos. Si a y b son números positivos y n es racional, se satisfacen las siguientes propiedades.

1. ln1=0
2. ln (PQ)= ln P + ln Q
3) ln P^n=n ln P
4) ln (P/Q)= ln P – ln Q

Derivada de la función logaritmo natural.

Sea u una función derivable en x

$$1.\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}, x > 0 \qquad 2.\frac{d}{dx}(lu) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{u'}{u}, u > 0$$

www.elsolucionario.org

Derivación logarítmica.

Se llama derivación logarítmica al proceso de utilizar los logaritmos como ayuda en la derivación de funciones no logarítmicas. Ejempló.

Ejemplo: Hallar la derivada de $y=\dfrac{x^2\sqrt{3x-2}}{(x-1)^2}, x>1$

1. Se Reescribe la función. $y=\dfrac{x^2\sqrt{3x-2}}{(x-1)^2}, x>1$
2. Se aplica logaritmo en ambos miembros. $\ln y=\ln\dfrac{x^2\sqrt{3x-2}}{(x-1)^2}$
3. Aplicando las propiedades logarítmicas en ambos miembros. $\ln y=2\ln x+\frac{1}{2}\ln(3x-2)-2\ln(x-1)$
4. Derivar en ambos lados. $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{3x-2}\right)-\dfrac{2}{x-1}$
5. Despejar a y $y'=\left[\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{3x-2}\right)-\dfrac{2}{x-1}\right]y$
6. Sustituyendo a y por el paso 1. $y'=\left[\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{3x-2}\right)-\dfrac{2}{x-1}\right]\dfrac{x^2\sqrt{3x-2}}{(x-1)^2}$

Ejemplo 2: Hallar la derivada de $y=\dfrac{(x-1)^4}{\sqrt[7]{x-2}}$

$$Lny=Ln\frac{(x-1)^4}{\sqrt[7]{x^9-2}}\rightarrow Lny=4Ln(x-1)-\frac{1}{7}Ln(x^9-2)$$

Resolviendo

$$\frac{y'}{y}=4(\frac{1}{x-1})-\frac{1}{7}\left(\frac{9x^8}{x^9-2}\right)\rightarrow y'=\left[(\frac{4}{x-1})-\frac{1}{7}\left(\frac{9x^8}{x^9-2}\right)\right]\frac{(x-1)^4}{\sqrt[7]{x-2}}$$

- *"Cuando se muere un viejo es como si se quemara una biblioteca"*
  (Probervio africano)

www.elsolucionario.org

Resolución de derivadas por fórmulas

Sean u y v funciones de x.

1. La regla de la constante

$$\frac{df}{dx} = \frac{d(c)}{dx} = 0$$

2.Regla de una variable respecto a ella misma

$$\frac{df}{dx} = \frac{d(x)}{dx} = 1$$

3 .Regla del múltiplo constante.

$$\frac{d(cu)}{dx} = c\left(\frac{du}{dx}\right)$$

4. Regla de las potencias.

$$\frac{d}{dx}\left[u^n\right] = nu^{n-1}u'$$

5. Regla de la suma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left[u \pm v\right] = u' \pm v'$$

6. Regla del producto:

$$\frac{d}{dx}\left[uv\right] = uv' + vu'$$

7. Derivada del cociente.

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{u}{v}\right] = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

Ejemplo 1: Resolver las siguientes derivadas

$$\frac{d}{dx}\left[(x^3+1)(5x-1)\right]$$

Esta es la derivada de un producto,
por lo tanto se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = (x^3+1)\frac{d}{dx}(5x-1) + (5x-1)\frac{d}{dx}(x^3+1)$$
$$= (x^3+1)(5) + (5x-1)(3x)$$
$$= 5x^3 + 15x^2 - 3x + 5$$

Ejemplo 2: Resolver $\frac{d}{dx}(x^2+6x-4)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) + 6\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(4)$$
$$\frac{dy}{dx} = 2x + 6$$

www.elsolucionario.org

Derivadas de funciones trigonométricas

8) $\frac{d}{dx}\left[Sen(u)\right] = \cos u.u'$

9) $\frac{d}{dx}\left[C\,\text{os}(u)\right] = -senu.u'$

10) $\frac{d}{dx}\left[Tan(u)\right] = \sec^2 u.u'$

11) $\frac{d}{dx}\left[Cot(u)\right] = -\text{cosec}^2\, u.u'$

12) $\frac{d}{dx}\left[Sec(u)\right] = \sec u.\tan u\ .u'$

13) $\frac{d}{dx}\left[Cosec(u)\right] = -\text{cosec}\, u.\cot u.u'$

Ejemplo: Derivar $y = Sen(x^2+9) \rightarrow y' = 2x\cos\ (x^2+9)$

Derivadas de funciones exponenciales

14. función potencial inversa

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{u^n}\right] = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$$

15. Derivadas para raíz (n-esima)

$$\frac{d}{dx}\left[\sqrt[n]{u}\right] = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$$

Ejemplo: Derivar $y = \sqrt[9]{x^2+} \rightarrow 3y' = \frac{2x}{9\sqrt[9]{\left[x^2+3\right]^8}}$

16. Derivada de la función exponencial en base a.

a) $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x.\ln a$

b) $\frac{d}{dx}(a^u) = a^u.\ln a.u'$

17. Derivada de la función exponencial natural.

a) $\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$

b) $\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\,\frac{du}{dx}$

www.elsolucionario.org

18) Derivada de una función elevada a otra función.

$$\frac{d}{dx}(u^v) = v.\,u^{v-1}.\,u' + u^v \,.\,\text{Ln u}\,.\,\text{v}'$$

Derivadas de funciones Logaritmicas

18. Derivada de la función logaritmo natural.

$$\frac{d}{dx}\left[Ln(u)\right] = \frac{u'}{u}, u > 0$$

19. Derivada de la función logaritmo decimal.

$$\frac{d}{dx}\left[Log_a(u)\right] = \frac{u'}{u.\ln a}$$

Ejemplo: Derivar $y = \text{Ln}\left(Cosx + \sqrt[3]{x+1}\right)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}\left[Cosx + \sqrt[3]{x+1}\right]}{Cosx + \sqrt[3]{x+1}} = \frac{-Senx + \frac{1}{3\sqrt[3]{[x+1]^2}}}{Cosx + \sqrt[3]{x+1}}$$

www.elsolucionario.org

Cálculo Integral

Práctica: 1

Apellidos:..... Matrículas:.....

Grupo: .....Fecha: .....Profesor(a): .....

Práctica de funciones logarítmicas y exponenciales.

I. Deriva las siguienttes funciónes:

1. $y = \ln\sqrt{x^5 - 2x}$

2. $y = \text{Log}_9\left(2x^4 - 5\right)^5$

3. $y = \ln\sqrt[6]{\left[(2x-1)\left(3x^3+4\right)\right]}$

4. $y = \dfrac{x^3\sqrt{6x-2}}{(x+3)^7}$

5. $y = \sqrt[3]{\dfrac{\left(x^5\right)\left(\sqrt{x^3-1}\right)\left(x^4-6\right)}{(2x+7)^8}}$

6. $y = \dfrac{(x-5)^3\left(2x^3\right)}{\sqrt[7]{2x-2}}$

7. $y = \ln\left[\dfrac{\left(\sqrt[3]{4x^5-2}\right)(2x-6)^4}{\sqrt[8]{5x-2}}\right]^{23}$

II. Halle la derivada de las funciones exponenciales dadas:

1. $y = e^{\sqrt{x^4+senx^3+\ln x}}$

2. $y = \text{Tan}\left(e^{(\cot 8x+6)}\right) + x^4 e^{\left(x^5+6x^3-9\right)}$

3. $y = e^{x^7 \sec x} sen\left(\ln x\right)$

4. $y = \left(\sqrt{Cot^9\left(e^{x^3+2}\right)+5}\right)\cos x^6$

5. $y = x^3 \cos e^{sen5x}$

6. $y = 7^{\sqrt{sen^3x-2senx+8}}$

7. $y = e^{\cos\sqrt{5x+x}} + 9^{\left(\ln x^6+senx^3\right)}$

8. $y = x^3\ \text{Tan}\left(e^x.senx\right)$

9. $y = \left(Co\sec 9x\right)(\ln\cos x)$

www.elsolucionario.org

III. Encuentre la derivada de las funciones exponenciales

1. $y = 5^{\left(x^8 - x^2 + sen \ln 2x\right)}$

2. $y = 4^{\sqrt{\tan x + x}}\, 7^{\cos x^2 + 3x^4}$

3. $y = \sec\left[10^{\left(x^6 + \ln \cos x\right)}\right]$

4. $y = 6^{\ln\left[\sqrt{x^3 - x^2 + 6x}\right](Cotx)}$

5. $y = 6^{\left(\cot x^3 + \sqrt{x + \ln x}\right)}$

6. $y = 12^{cos(\ln x + 5x)} sen4^{x^2}$

7. $y = 16^{\sec\left(x^3 + senx\right)} e^{\cos 2x}$

8. $y = 10^{\tan + sen^2 x} + \ln 4x$

9. $y = 6^{\cos x}$

IV. Determine la derivada de cada función:

1. $y = \log_2 \sqrt{senx + x^5}$

2. $y = \log_4 \left(\dfrac{\sqrt{Sen^5 x + x}}{T \text{an} e^{x \cos x}} \right)$

3. $y = \log_{16}\left(x^3 + \cot x\right)^{\sec 6x}$

4. $y = \log_{10} \sqrt[2]{x^6 + 2 \tan x \cos^5} * \left(x + 7\right)$

5. $y = \log_{18}\left(\sec\left(x^9 - e^{3x}\right)\right)^5$

"La cara es el espejo del alma, y los ojos confiesan en silencio los secretos del corazón" (San Jerónimo)

www.elsolucionario.org

20. Derivadas de las funciones trigonométricas inversas.

$$\frac{d}{dx}(arcsenu)=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \qquad \frac{d}{dx}(\arccos u)=\frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(arc\tan u=\frac{u'}{1+u^2} \qquad \frac{d}{dx}(arc\cot u)=\frac{u'}{1+u^2}$$

$$\frac{d}{dx}(arc\sec u)=\frac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}} \qquad \frac{d}{dx}(arcc\sc u)=\frac{-u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$$

26. Derivación e integración de funciones hiperbólicas.

$$\frac{d}{dx}(senhu)=(\cosh u)u' \qquad \frac{d}{dx}(\coth u)=-(\csc^2 u)u'$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh u)=(senhu)u' \qquad \frac{d}{dx}(\sec hu)=-(\sec hu\tanh u)u'$$

$$\frac{d}{dx}(\tanh u)=(\sec h^2u)u' \qquad \frac{d}{dx}(\csc hu)=-(\csc hu\coth u)u'$$

32. Derivación de funciones hiperbólicas inversas.

$$\frac{d}{dx}[senh^{-1}u]=\frac{u'}{\sqrt{u^2+1}} \qquad \frac{d}{dx}[cosh^{-1}u]=\frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}[\tan h^{-1}u]=\frac{u'}{1-u^2} \qquad \frac{d}{dx}[co\,t\,h^{-1}u]=\frac{u'}{1-u^2}$$

$$\frac{d}{dx}[\sec h^{-1}u]=\frac{-u'}{u\sqrt{1-u^2}} \qquad \frac{d}{dx}[c\sc h^{-1}u]=\frac{-u'}{u\sqrt{1+u^2}}$$

Ejemplos: Hallar la derivada de las funciones dadas.

1) $y=Arcsen\ (x^2+4)\rightarrow y'=\dfrac{2x}{\sqrt{1-\left(x^2+4\right)^2}}$

2) $y=Sech\left(x^6+3x-1\right)$

$\rightarrow y'=-\left(6x^5+3\right)\ Sech\left(x^6+3x-1\right)\ Tanh\left(x^6+3x-1\right)$

www.elsolucionario.org

Cálculo Integral

Práctica: 2

Apellidos:..... Matrículas:.....

Grupo: .....Fecha: .....Profesor(a): .....

Práctica de funciones trigonométricas inversas e hiperbólicas:

I. Halle la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = arcsen\left(x^5 + \tanh x\right) + \ln\left(x-7\right)$

2. $y = \arctan\sqrt{x^9 + 9x^5} + e^{\sqrt{\arccos x + x}}$

3. $y = \operatorname{arcsec}\left(4^{\csc x} + x^4\right)$

4. $y = 11^{\ln arc\cot\sqrt{x}} + sen\left(x^9 + \arccos x\right)$

5. $y = \left[\sqrt{x^5+3}\right]\left[\arctan\left(6x + 3^{x^2}\right)\right]$

6. $y = 6^{arc\sec\left(x^6+6x^3\right)} + \log_{10}\left[\dfrac{\sqrt{senx + x}}{\left(x^9-5\right)}\right]$

7. $y = \operatorname{Arccos}\left(x^2 + 9^{sen\sqrt{x+3}}\right)$

8. $y = \operatorname{Sen}\left(arc\sec\left(\ln x\right)\right) + \ln\arctan x^7$

9. $y = 14^{\arctan\sqrt{x-8}} + \left(x^4 + 11x\right) arc\sec x$

10. $y = \operatorname{Arcsen}\sqrt{x}\left(\ln x^6\right)$

II. Determine la derivada de cada función:

1. $y = \operatorname{senh}\left(x^8 + \ln x\right)$

2. $y = \tanh\left(arcsenx + x\right)$

3. $y = x^7 \sec h\left(9^{\sqrt{x+10}}\right) + \ln\dfrac{senh\left(e^{4x} + \tan x\right)}{x-3}$

4. $y = \cos ch\left(x^8 - senx\right)$

5. $y = \sqrt{x + \tan e^x}\coth\left(\ln x^5\right)$

6. $y = \log_9 senhx \tanh x^{11}$

7. $\ln\left[senx + 3\right]^{\tanh x} + \coth\sqrt{x^2 - 5x + 4}$

8. $y = 13^{\cosh\left(x + e^{4x}\right)} 9^{\tanh(\ln x)}$

El mejor medio de conservar los amigos es no pedirles ni deberles nada.

François de la Rochefoucauld. Escritor francés.

www.elsolucionario.org

Indeterminaciones y Límites

Las formas indeterminadas

A $0/0$ y ∞/∞ Se le llama formas indeterminadas porque no garantizan que el límite exista, ni indican cual es en caso de existir.

Las más comunes son $\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{-\infty}, 0\infty, \frac{0}{\infty}, 0^{\infty}, 1^{\infty}, \infty - \infty$

Regla de L'HÔpital

Sean f y g funciones que son derivables en un intervalo abierto (a,b) conteniendo un $c \in$ (a,b). Asumir que g´(x) existe para todo x en (a,b), excepto posiblemente el propio c. si el límite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ cuando x tiene a c produce la forma indeterminada $0/0, \frac{\infty}{\infty}$, entonces ,

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Supuesto que el límite de la derecha existe es infinito). Este resultado también aplica si el límite de $\frac{f(x)}{g(x)}$ cuando x tiende a C produce cualquiera de las formas indeterminadas $\infty/\infty, -\infty/\infty, \infty/-\infty, ó -\infty/-\infty$.

Ejemplo 1. Encuentre el $\lim_{x \to 0} \frac{2x - senx}{x}$

$\lim_{x \to 0} \frac{2x - senx}{x} = \frac{2(0) - sen0}{0} = \frac{0-0}{0} = \frac{0}{0}$ Como el cálculo directo nos lleva a la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ podemos aplicar la regla de L'HÔpital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x - senx}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 - \cos x}{1} = \lim_{x \to 0} 2 - \cos x = 2 - \cos 0 = 2 - 1 = 1$$

www.elsolucionario.org

Ejemplo 2. Halle el límite de $\underset{x\to 2}{Lim}\dfrac{\ln(3x-5)}{Tan(x-2)}$

Evaluando se tienes que $\underset{x\to 2}{Lim}\dfrac{\ln(3x-5)}{Tan(x-2)}=\dfrac{0}{0}$

Ahora plicando regla de L'Hopital $\underset{x\to 2}{Lim}\dfrac{\dfrac{3}{3x-5}}{Sec^2(x-2)}=\underset{x\to 2}{Lim}\dfrac{3}{(3x-5)Sec^2(x-2)}=\dfrac{3}{1}=3$

Ejemplo 3. Determine el límite $\underset{x\to 0}{Lim}(\cos x)^{Cotx}$

1. Evaluando directamente se tiene que $\underset{x\to 0}{Lim}(\cos x)^{\cot x}=(\cos 0)^{\cot 0}=1^{\infty}$
2. Ahora se aplica logaritmo natural $Ln\,y=\lim_{x\to 0}Ln(\cos x)^{\csc x}$
3. Aplicando propiedades logarítmicas y evaluando
   $\ln y=\lim_{x\to 0}1n(\cos x)^{Cotx}=\lim_{x\to 0}\cot x1n\cos x=(\cot 0)1n\cos 0=\infty.0$
4. Para aplicar el Hoppital se debe obtener las indeterminaciónes $\dfrac{0}{0}\acute{o}\dfrac{\infty}{\infty}$
5. En la expresión (2) aplicar identidades trigonométricas y evaluar
6. $=\lim_{x\to 0}\cot x1n\cos x=\lim_{x\to 0}\dfrac{Ln(\cos x)}{Tanx}=\dfrac{0}{0}$
7. Ahora si se puede aplicar la regla de Hoppital

   $Lny=\lim_{x\to 0}\dfrac{Ln(\cos x)}{Tanx}=-\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{Senx}{Cosx\ Secx}\right]=-\lim_{x\to 0}\left[\dfrac{Senx}{1}\right]$

   $=-\lim_{x\to 0}[Senx]\to Lny=0$
8. Como La variable dependiente esta afectada por un logaritmo se aplica la operación inversa de esta.

   $Lny=0\to e^{Lny}=e^0\to y=1\qquad\therefore \underset{x\to 0}{Lim}(\cos x)^{Cotx}=1$

www.elsolucionario.org

Cálculo Integral

Práctica: 3

Apellidos:..... Matrículas:.....

Grupo: .....Fecha: .....Profesor(a): .....

I. Busca el límite de las siguientes funciones:

1. $y=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$

2. $y=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$

3. $y=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x+5}{5x^2+6x-3}$

4. $y=\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}$

5. $y=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

6. $y=\lim_{x\to 0}\frac{sen2x}{sen3x}$

7. $y=\lim_{x\to 3}\frac{e^x-e^3}{x-3}$

8. $y=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

9. $y=\lim_{x\to 3}\left[\frac{5}{x^2-9}-\frac{2}{x-3}\right]$

10. $y=\lim_{x\to 0}\frac{x^5+3x^2}{x^2-8x}$

11. $\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{e^x-e^2}$

12. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\tan 3x}$

13. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{-3x}}{senx}$

14. $\lim_{x\to\infty}\left[x-\sqrt{x^2-x}\right]$

15. $\lim_{x\to 0}(\tan x)^{senx}$

16. $\lim_{x\to\infty}\frac{7x^2+4x}{x^3-2x^2}$

17. $\lim_{x\to 0}(\cos)^{\frac{1}{x}}$

18. $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4-x^2}-x}{x}$

19. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+5x+2}-x$

El hombre que sabe gastar y ahorrar es el más feliz, porque disfruta de ambas cosas. Samuel Johnson. Ensayista, poeta y dramaturgo inglés.

www.elsolucionario.org

Cálculo Integral

En el siglo III a.c Arquímedes y otros griegos empezaron a investigar cómo conseguir el área y volumen de cualquier figura geométrica. Dieron una regla general para calcular la medida del área de un rectángulo (b.h), por tal razón el área de un triangulo rectángulo es (1/2.b.h).

Se sabe que la trigonometría nos proporciona fórmulas para hallar la medida de cualquier clase de triángulo (1/2b.h senθ). Los pitagóricos inventaron que un polígono se puede descomponer en triángulos, entonces su área se consigue mediante la suma de las áreas de los triángulos en que se ha dividido (Método del agotamiento). Este procedimiento de medir áreas sólo es aplicable a figuras planas limitadas por segmentos de rectas y es un aproximado. En esa época los griegos no encontraron una expresión general por falta de herramientas (limite).

La ciencia queda al desnudo con la quema de la biblioteca de Alejandría (S. III d.c), años más tarde (1600) Johane Keepler Comienza a investigar sobre área de figuras curvas y funciones, acertó en muchas cosas pero no pudo encontrar un método general.

Después Pierret Fermat y Renet Descartes (Franceses) combinan algebra y geometría (descripción de figuras a través de ecuaciones).

Finalmente ha mediado del siglo XVII se logra inventar un método general para buscar área bajo curva, a ese método se le llamo integración.

El cálculo integral, encuadrado en el cálculo infinitesimal, es una rama de las matemáticas en la cual se estudia el cálculo a partir del proceso de integración o anti-derivación.

Fue inventado por Leibniz, Newton y Barrow, éste último junto a Newton, crearon el Teorema fundamental del cálculo integral que propone que la derivación y la integración son procesos inversos.

La integración es una herramienta para calcular mucho más que áreas y volúmenes. Tiene aplicaciones en estadística, economía, ciencias e ingeniería. Permitiéndo calcular rangos de aplicaciones de probabilidad y promedios de consumo de energía, así como la fuerza del agua contra las compuertas de una presa. Su objetivo es permitir calcular efectivamente muchas cantidades, dividiéndola en partes más pequeña y sumando después en total cada trozo.

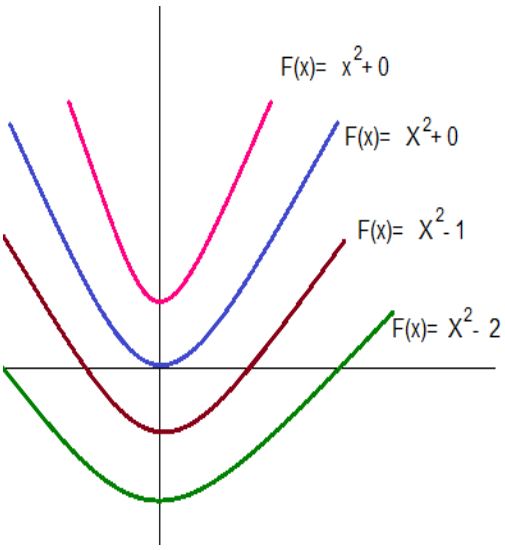
www.elsolucionario.org

Función primitiva, antiderivada o integral.

Es la relación dependiente de datos sobre uno o más valores que declaran los límites de un área. A través de la primitiva se encuentran una familia de funciones que solo difieren en la constante. Por lo que

$$\int f(x)dx = F(x)+c \rightarrow \frac{dy}{dx}(F(x)+c) = f(x),$$

eso indica que la operación inversa de la integración es la derivación y viceversa. La función f (x) posee infinitas integrales que solo se diferenciaran en una constante (c).



Tipos de Integrales.

Hay dos tipos de integrales, las cuales son la **integral definida** cuyo resultado es un número y la **integral indefinida** mediante la cual se obtiene otra función.

En este manual empezaremos por el estudio de las integrales indefinidas Las cuales formar parte de ecuaciones y descripciones de modelos en el gran marco de las teorías de matemáticas puras y aplicadas.

El diferencial es el que nos indica respecto a cual variable es que vamos a integral.

$\int(\lambda+\Phi)d\lambda$ la integración se va a realizar respecto a λ, no sobre Φ.

www.elsolucionario.org

Resolución de integrales
Por medio de integración inmediata.

Para resolver integrales de este tipo es conveniente que el estudiante memorice una serie de integrales fundamentales

1. **Integral de Cero**: Será igual a una constante. $\int 0dx = C$
2. **Integral del diferencial de una variable**:
   Es igual a la variable más una constante. $\int dx = x + C$
3. **La integral del producto de una constante por una función**:
   Es igual al producto de la constante por la integral de la función.
   $$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$
4. **La integral de la suma (o diferencia) de dos funciones:** Es igual a la suma (o diferencia) de las integrales de cada una de ellas.
   $$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$
5. **Integral de una función exponencial:** Es igual a la base de la función elevada al exponente aumentado en uno y dividido por el exponente aumentado en uno, más una constante, es decir, para $n \neq -1$ de una forma general tenemos que $\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, Para todo número real $n \neq -1$. $\int u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$
6. **integral de la función exponencial e** $\int e^u.du = e^u + C$

Reglas para la integración de este tipo:

1. Se reescribe la función ponerla de tal forma que se pueda integral.
2. Se integra.
3. Reducción de términos semejantes.
4. Escribir el resultado de la integral.

www.elsolucionario.org

Ejemplos: Resuelva las siguientes integrales.

$$a.\int x^6 dx = \frac{x^{6+1}}{6+1} = \frac{x^7}{7} + C$$

$$d.\int 5x^4 dx = 5\int x^4 dx = 5(\frac{x^{4+1}}{4+1}) = x^5 + c$$

$$b.\int x^{-4} dx = -\frac{x^{-3}}{3} + c = -\frac{1}{x^3} + c$$

$$f.\int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}.x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$c.\int (x^5 + 4x^4 - 3x^{-2} + x - 1)dx$$
$$= \int x^5 dx + 4\int x^4 dx - 3\int x^{-2} dx + \int x dx - \int dx$$
$$= \frac{1}{6}x^6 + \frac{4}{5}x^5 + 3x^{-1} + \frac{1}{2}x^2 - x + c$$

En los siguientes ejemplos hay que desarrollar el numerador.

Ejemplo g: $\int (4 + x^3)^2 dx = \int 16dx + 8\int x^3 dx + \int x^6 dx = 16x + 2x^4 + \frac{1}{7}x^7 + c$

Ejemplo h: $\int (1 + e^x)^2 dx = \int dx + 2\int e^x dx + \int e^{2x} dx = x + 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + c$.

Solo si estás dispuesto a ir demasiado lejos sabrás lo lejos que puedes llegar.

Autor pendiente

www.elsolucionario.org

Resolución de integrales por el método de sustitución o cambio de variable.

Las operaciones de integración de funciones pueden llegar a ser muy complicadas, para facilitarlas se han ideado diversos procedimientos generales, de los cuales uno de los métodos más importante para la resolución de integrales complicadas es el llamado **método de sustitución o cambio de variable**. Esta técnica consiste en introducir una nueva variable (**u)** para sustituir a una expresión apropiada del integrando, de manera que la expresión resultante sea más fácil de integrar. Hay que tomar en cuenta que si tenemos a u también debemos tener su diferencial por lo tanto debemos derivar.

7. La función logaritmo natural y la integración.

Sea u una función derivable de x.

a. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$ b. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

Ejemplo 1: resolver las siguientes integrale.

$$\int (1+e^x)^5 e^x dx = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + c = \frac{(1+e^x)^6}{6} + c$$

$$u = 1 + e^x, du = e^x dx$$

Ejemplo 2: Separando el numerador.

$\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x} dx$; haciendo $u = x^3 + 2x$ el denominador y luego derivando para obtener el numerado y sustituir cada valor $du = (3x^2+2)dx$, por lo tanto tenemos que y obtenemos de resultado a $\int \frac{du}{u} = LnU = \lim(x^3+2x) + c$

www.elsolucionario.org

Ejemplo 3: Integrar $\int \frac{x}{x^2+1}dx$

$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du \rightarrow u = x^2+1 \text{ y } du = 2xdx$

despejando a du se tiene que:

$\frac{du}{2} = xdx$, aplicando la regla logarítmica para la integración:

$\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + c$

Ejemplo4: $\int \frac{2x+1}{x^2+x-6}dx = L|x^2+x-6|$ Esta integral es inmediata ya que el numerador es exactamente la derivada del denominador la siguiente también solo que tenemos que acomodar el numerador a través de artificios matemáticos.

Ejemplo5: $\int \frac{x-1}{x^2-2x-6}dx = \frac{1}{2}c$

Ejemplo 6: Resuelva la siguiente integral $\int x^4 \sqrt[3]{1+x^5}dx$

$z = 1+x^5, \quad dz = 5x^4dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{5}\int z^{1/3}dz = \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}z^{4/3}\right)$

$\therefore \int x^4\sqrt[3]{1+x^5}dx = \frac{3}{20}\sqrt[3]{\left(1+x^5\right)^4} + c$

www.elsolucionario.org

Resolución de integrales trigonométricas y potenciales aplicando el método de sustitución.

8) $\int e^u .du = e^u + C$

9) $\int a^u .du = \frac{a^u}{\ln a} + C$

10) $\int senu.du = -\cos u + C$

11) $\int \cos u.du = senu + C$

13) $\int tgu.du = \ln(\sec u) + C$ ó $-\ln|\cos x| + c$

14) $\int ctgu.du = \ln(senu) + C$ ó $-\ln|\csc x| + c$

15) $\int \sec u.du = \ln(\sec .u + tgu) + C$

16) $\int \cos ecu.du = \ln(\cos ec.u - ctgu) + C$

a) Demostración de la integral de la tangente.

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{1}{\cos x}(-\sin x dx)$$

sea

$u = \cos x, \Rightarrow du = -\sin x dx$

al hacer las sustituciones respectivas, se obtiene

$$\int \tan x dx = -\int \frac{1}{u} du = -1n|u| + c = 1n|u^{-1}| + c = 1n|\cos^{-1} x| + c,$$

$$\int \tan x dx = \ln|\sec x| + c$$

www.elsolucionario.org

b) Demostración de la integral de la cotangente.

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x}$$

$si\ u = \sin x \rightarrow du = \cos x dx$

$$\therefore \int co\,t\, x dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|senx| + c$$

c) Demostración de la integral de la secante $\int Secxdx$.

Multiplicando y dividiendo el integrando por secx+tanx

$$\int \sec x dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{(\sec x \tan x + \sec^2 x)dx}{\sec x + \tan x}$$

Resolviendo por el método de sutitución trigonométrica

$$u = \sec x + \tan x, \quad \Rightarrow \quad du = (\sec x \tan x + \sec^2 x)dx$$

$$\int \sec x dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c;$$

$$\rightarrow \int Secxdx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

d)Demostración de la integral de la cosecante $\int Cscxdx$

Multiplicando y dividiendo el integrando por cscx-cotx

$$\int \csc x dx = \int \frac{\csc x(\csc x - \cot x)}{\csc x - \cot x} dx = \int \frac{(\csc^2 x - \csc x \cot x)dx}{\csc x - \cot x}$$

$$u = \csc x - \cot x, \quad \Rightarrow \quad du = (-\csc x \cot x + \csc^2 x)dx$$

$$\int \csc x dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c;$$

Por lo que $\int Cscxdx = Ln|Cscx - \cot x| + C$

Ejemplos: Calcular la siguentes integrales.

$$\int \cos(9x)dx = \frac{1}{9}\int \cos z dz = \frac{1}{9}(senz) =$$

$z = 9x$ $\qquad = \frac{1}{9} sen9x + c$

$dz = 9dx$

www.elsolucionario.org

Resolver $\int senx\sqrt[7]{1-\cos x}dx$

$u = 11-\cos x \ , \qquad du = senxdx$

$$\int (u)^{1/7}du = \frac{u^{8/7}}{8/7} \quad = \frac{7}{8}\sqrt[7]{(1-\cos x)^8} + c$$

Resolución de integrales aplicando identidades y sustitución trigonométricas.

Las integrales trigonométricas vistas en cursos anteriores son de mucha importancia, pues las vamos a usar para poder integrar fácilmente.

Ejemplo 1: Hallar $\int \sqrt{(\tan^2 x+1)}dx$

Como $\tan^2 x+1 = \sec^2 x$, entonces

$$\int \sqrt{(\tan^2 x+1)}dx = \int \sqrt{\sec^2 x}dx = \int \sec x dx$$

Aplicando la fórmula 15 tendremos que:

$$\int \sec x dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

Ejemplo 2: $\int \frac{cox}{senx+1}dx$

$$u = senx+1 \Rightarrow du = \cos x$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|senx+1| + c$$

Ejemplo 3:

$$\int sen^2\theta d\theta$$

$$como \quad sen^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \quad Entonces \ \ sera$$

$$\int \frac{1}{2}d\theta - \int \cos 2\theta d\theta;$$

La primera es una integral directa y la segunda por sustitucion.

$$\int sen^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}sen2\theta + c$$

"Libros, caminos y dias dan al hombre sabiduria".
Proverbio árabe.

www.elsolucionario.org

Ejemplo 4: Resolver $\int\left[\frac{Sen\ z + \text{Tan}\ z}{Sec\ z}\right]dz$

$$\int(Sen\ z + \text{Tan}\ z)\frac{1}{Sec\ z}\,dz = \int(Sen\ z + \text{Tan}\ z)Cos\ z\ dz$$

$$= \int(Sen\ z\ Cos\ z\ dz) + \int(Sen\ z)\ dz, \text{ Resolviendo cada integral}$$

$$I_1 = \int(Sen\ z\ Cos\ z\ dz) = \frac{1}{2}sen\ z + c \quad \& \quad I_2 = +\int(Sen\ z)\ dz = -\cos\ z + c$$

$$\therefore$$

$$\int\left[\frac{Sen\ z + \text{Tan}\ z}{Sec\ z}\right]dz = \frac{1}{2}senz - \cos z + c$$

El hombre que tiene lengua no es hombre, si no puede con ella conquistar a una mujer. William Shakespeare

www.elsolucionario.org

Cálculo Integral

Práctica: 4

Apellidos:…… Matrículas:……..

Grupo: ……Fecha: ……..……Profesor(a): ……..……

Integrales inmediatas y sustitución

1 $\int x^9 dx$

2. $\int (r^2 - r + 4) dr$

3. $\int x^{\frac{3}{4}} dx$

4. $\int x\sqrt{1+x}\, dx$

5. 5. $\int \left(y^{\frac{2}{5}} - 2y^{\frac{1}{4}} + \sqrt[3]{y} - \frac{1}{5} \right) dy$

6. $\int \frac{2y^3 - 3\sqrt{y} + 9}{y^2} dy$

7. $\int (4e^{9t} - 7Sen6t) dt$

8. $\int \frac{Ln^2 x dx}{x}$

9. $\int (2 - 3x)^5 dx$

10. $\int 2z(z^2 - 4)^3 dz$

11. $\int \frac{\sqrt[3]{1+Lnx}}{x} dx$

12. $\int Cos7\phi d\phi$

13. $\int Sen^2\psi Cos\psi d\psi$

14. $\int 5w^{-4} dw$

15) $\int \frac{u^3}{\sqrt{4+u^2}}\, du$

www.elsolucionario.org

II. Resuelve las siguientes integrales:

1) $\int \left(\tan^2 x11\right) dx$

2) $\int \frac{4}{sen^2 x}\, dx$

3) $\int \frac{\sec x \sqrt[5]{\left(1+\frac{1}{\cos x}\right)^2}}{\cot x} dx$

4) $\int \sqrt{\frac{1}{c\sec^2 x}+\frac{1}{\sec^2 x}} dx$

5) $\int \frac{\sec x e^{\tan x}}{\cos x} dx$

6) $\int \frac{e^{arc\sec x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$

7) $\int \frac{\sqrt{(arc\cot)^3}}{1+x^2} dx$

8) $\int \frac{6}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}$

9) $\int \frac{7}{x\ln\sqrt{x}} dx$

10) $\int \frac{7}{x\sqrt{\ln x}} dx$

11) $\int \frac{5(\ln x)^9}{3x} dx$

12) $\int \frac{x}{\sqrt[7]{x+3}} dx$

13) $\int x^2\sqrt{x+4} dx$

14) $\int \frac{x}{(2x+3)^2} dx$

15) $\int \frac{\tan\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

Las personas no cambian por el simple hecho de cambiar, sino, cuando hacen conciencia de que realmente deben cambiar.

Wilton Oltmanns

www.elsolucionario.org

Integración por partes

El método de integración por parte surge cuando hay un producto fruto de combinaciones de funciones, tal como una algebraica unida a una trigonométrica, una algebraica unida a una logarítmica, una trigonométrica inversa y una logarítmica solas, aunque también puede ser una trigonométrica con una transcendente cualquiera, etc.

Debido a que no hay una integral inmediata para resolver un producto de integrales, ha sido necesario crear un método para darle solución a estas. Sean u y v funciones de x con derivadas continuas.

Demostración: $\int udv = uv - \int vdu + c$

Derivando a (uv) $\rightarrow d(uv) = udv + vdu$

Despejando a $udv \rightarrow udv = d(uv) - vdu$

ahora se integra $\int udv = \int duv - \int vdu + c$

y se obtiene $\int udv = uv - \int vdu + c$

Nota: Cuando se está frente a una integral por partes, es conveniente seleccionar como dv la parte más complicada, pero de más fácil integración y como u el resto. Luego se hacia el proceso de integración cuantas veces sea necesario

www.elsolucionario.org

Regla nemotécnica:

- Para elegir la función u se puede usar una de las siguiente reglas sabiendo que esta sera la función de la izquierda.

1. **L**ogarítmicas, **I**nversas trigonométricas, **A**lgebraicas, **T**rigonométricas, **E**xponenciales. ⇒ **L I A T E**.

2. **I**nversas trigonométricas, **L**ogarítmicas, **P**otenciales, **E**xponenciales, **T**rigonométricas ⇒ **I L P E T**

Nota: Elegimos siempre "u" como la función situada más a la izquierda de la palabra **ILPET, LIATE O ALPES.**

El hombre que tiene lengua no es hombre, si no puede con ella conquistar a una mujer. William Shakespeare

www.elsolucionario.org

Resuelva las siguientes integrales:

Ejemplo 1: Re*solver* $\int xe^x dx$

$si\, u = x \rightarrow du = dx$

$dv = e^x \rightarrow v = e^x$

$\therefore acoplando \int x.e^x.dx \;\; a\, la \;\; fórmula \int udv = uv - \int vdu + c$

$\rightarrow xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$

Ejemplo 2: Re*solver* $\int \theta \ln \theta . d\theta$

$si\, u = \ln\theta \rightarrow du = \frac{1}{\theta} d\theta$

$dv = \theta d\theta \rightarrow v = \frac{\theta^2}{2}$

$\therefore acoplando \;\; \int \theta \ln \theta . d\theta \;\; a\, la \;\; fórmula \int udv = uv - \int vdu + c$

$\rightarrow \left(\frac{\theta^2}{2}\right)\ln\theta - \frac{1}{2}\int \theta d\theta = \left(\frac{\theta^2}{2}\right)\ln\theta - \frac{\theta^2}{4} + C$

Ejemplo 3: Re*solver* $\int xe^{2x} dx$

$u = x \rightarrow du = dx$

$dv = e^{2x} dx \rightarrow$

Integrando a $\int dv = \int e^{2x} dx \rightarrow v = \frac{e^{2x}}{2}$

Aplicando el métdo de int*egración tenemos que*:

$\int xe^{2x} dx = uv - \int vdu + c = \frac{xe^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx$

$\int xe^{2x} dx = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$

A veces se tendría que aplicar varias veces este método hasta llegara a resolver definitivamente la integral, debemos tener en cuanta tal como ya lo vimos en los ejercicios anteriores que se debe llegar a resolver una sola integral y que la misma sea directa.

www.elsolucionario.org

Ejemplo 4: Resolver $\int x^2 \cos x dx$

$si\, u = x^2 \rightarrow du = 2xdx$

$dv = \cos x dx \rightarrow v = senx$

$\int x^2 \cos x dx = x^2 senx - 2\int x.senx.dx$

Re $solviendo$ $\int x.senx.dx$

$si\, u = x \rightarrow du = dx$

$dv = senxdx \rightarrow v = -\cos x$

$= -x\cos x + \int \cos x dx \rightarrow -x\cos x + senx$

$Uniendo$ $x^2 senx - (-x\cos x + senx) \therefore x^2 senx + x\cos x - senx + c$

Ejemplo 5: Resolver $\int \text{Arctan}\,(x)\text{dx}$

u : Arctanx ; du= $\frac{1}{1+x^2}dx$; $dv = dx$; $v = x$

$\int udv = uv - \int vdu + c \rightarrow \int \text{Arctan}\,(x)\text{dx} \rightarrow x\arctan x - \int \frac{1}{1+x^2}dx$

La siguiente integral se resuelve por sustitución

$\int \frac{1}{1+x^2}dx$

$z = 1 + x^2$; $dz = 2xdx$; $dx = \frac{dz}{2x}$

$= \int \frac{x}{z}\left(\frac{dz}{2x}\right) = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{2} Ln\left|1+x^2\right| + c$

$\therefore$

$\int \text{Arctan}\,(x)\text{dx} = xTan^{-1}x - \frac{1}{2} Ln\left|1+x^2\right| + c$

www.elsolucionario.org

Integrales cíclicas

Son aquellas que vuelven a su integral original por lo tanto hay que hacer algunos arreglos para obtener su resultado final.

Ejemplo 6: Resolver $\int e^x senxdx$

$u = senx \rightarrow du = \cos xdx$

$dv = e^x dx \rightarrow v = e^x$

Aplicando el métdo de integración *tenemos que*:

$$\int e^x senxdx = e^x senx - \int e^x \cos xdx$$

Dado que la integral de la derecha es por parte, aplicamos el métdo de nuevo.

$$\int e^x \cos xdx = e^x \cos x - \int -e^x senxdx = e^x \cos x + \int e^x senxdx$$

$u = \cos x \rightarrow du = -senx$

$dv = e^x dx \rightarrow \int dv = \int e^x dv;\ v = e^x$

Como se puede obsevar la integral original se repite, porque es cíclica,

$$\int e^x senxdx = e^x senx - e^x \cos x - \int e^x senxdx + c$$

$$\int e^x senxdx + \int e^x senxdx = e^x senx - e^x \cos x + c$$

$$2\int e^x senxdx = e^x senx - e^x \cos x + c$$

$$\int e^x senxdx = \frac{e^x senx - e^x \cos x}{2} + c$$

Ejemplo 7: Resolver $\int sen^2 x\,dx$

Reescribiéndola tenemos $\int (senx).(senx)dx$

$$\begin{cases} dv = senx.dx \rightarrow v = -\cos x \\ u = senx \rightarrow du = \cos x.dx \end{cases}$$

Aplicamos el método: $\int sen^2 x.dx = -senx.\cos x + \int \cos^2 x.dx$

www.elsolucionario.org

Aplicando identidades trigonométricas

$$\int sen^2 x.dx = -senx.\cos x + \int \left(1 - sen^2 x\right)dx$$

Luego operamos de acuerdo a las propiedades ya vistas de las integrales:

$$\int sen^2 x.dx = -senx.\cos x + \int dx - \int sen^2 x.dx$$

Luego operamos algebraicamente:

$$\int sen^2 x.dx + \int sen^2 x.dx = -senx.\cos x + \int dx \quad \rightarrow \quad 2\int sen^2 x.dx = -senx.\cos x + x$$

$$\int sen^2 x.dx = \frac{-senx.\cos x + x}{2} + C$$

*E*Jercicios: Resolver

$$.\int \frac{\ln x}{x} dx$$

$$.\int e^x \cos x dx$$

$$. \int e^{2x} sen3x dx \qquad \text{sol: } \frac{2sen3xe^{2x}}{13} - \frac{3\cos 3xe^{2x}}{13} + c$$

- "La cara es el espejo del alma, y los ojos confiesan en silencio los secretos del corazón" (San Jerónimo)

www.elsolucionario.org

Método Tabular

Es otro método de resolución de integrales que se usa frecuentemente sustitución del método de integrales por partes, pero este es una técnica matemática más fácil. Su inventor fue Dan Rosen profesor de la universidad de Hofstra.

Este método es para integrales que tienen la forma:

$$\int x^n \cos axdx,\ \int x^n senaxdx, \int x^n e^{ax}dx$$

Procedimiento:

Según el prof. ing. gil Sandro Gómez.

Para calcular $\int f(x)g(x)dx$ construye una tabla, donde se puedan poner las funciones a derivar (fx) en la columna "D" y en la columna "I" las funciones a integral (gx). Los signos van alternándose.

Signos		*Derivadas*		*Integrales*
$+$	$\rightarrow$	$f(x)$		$g(x)$
$-$	$\rightarrow$	$Df(x)$		$I(g)(x)$
$+$	$\rightarrow$	$D^2 f(x)$		$I^2(g)(x)$
...	...		...	
$\pm$		$D^n f(x)$	$\rightarrow$	$I^n(g)(x^1)$

Se continúa este proceso hasta que:

- La función a la izquierda se convierta en cero. En este caso siempre debe ser una algebraica.
- El producto de las funciones en el último reglón se pueda integrar.

www.elsolucionario.org

- El producto de las funciones sea un múltiplo constante del producto de las funciones en el primer reglón.

Resuelva la integral dada utilizando el método tabular.

Ejemplo: Resolver $\int x^4 e^x dx$

Signos	*u y sus derivadas*	*dv y sus integrales*
+	x^4	e^x
-	$4x^3$	e^x
+	$12x^2$	e^x
-	24x	e^x
+	24	e^x
-	0	e^x

$$\therefore \int x^4 e^x dx = x^4 e^x - 4x^3 e^x + 12x^2 e^x - 24xe^x + C$$

Resolucion de Integrales Trigonométricas con exponentes enteros.

Hay varios casos de este tipo de integrales, pero es bueno reconocer que los más comunes son del tipo.

$$\int sen^m x \cos^n x dx \qquad y \qquad \int \sec^m x \tan^n x dx$$

a) Integrales que contienen potencias de senos y cosenos

Caso 1. Si la potencia del seno es impar y positiva, conservar un factor seno y pasar los factores restantes a cosenos. Entonces, desarrollar e integrar.

$$\int sen^m x \cos^n x dx = \int sen^{2k+1} x \cos^n x dx = \int sen^{2k} x \cos^n x sen x dx$$

$$= \int \left(sen^2 x\right)^k \cos^n x sen x dx = \int \left(1 - \cos^2 x\right)^k \cos^n x sen x dx$$

www.elsolucionario.org

Ejemplo 1: Resolver $\int sen^5 x dx$

$$\int sen^5 x.dx = \int senx.sen^4 x.dx = \int senx.\left(sen^2 x\right)^2 .dx = \int senx\left(1-\cos^2 x\right)^2 .dx =$$

$$\int sen^5 x.dx = \int senx.\left(1-2\cos^2 x+\cos^4 x\right).dx = \int senx.dx - 2\int senx.\cos^2 x.dx + \int senx.\cos^4 x.dx$$

Tenemos tres integrales que se resuelven por metodos anteriormente vistos, como a) se resuelve directamente, b) y c) por sustitucion.

$$a)\int senx.dx = -\cos x + C_1$$

$$b)\int senx.\cos^2 x.dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + C_2$$

$$c)\int senx.\cos^4 x.dx = -\frac{\cos^5 x}{5} + C_3$$

$$\begin{cases} u = \cos x \\ du = -senx.dx \rightarrow dx = -\dfrac{du}{senx} \end{cases}$$

$$= -\int senx.u^4.\frac{du}{senx} = -\int u^4.du = -\frac{u^5}{5} + C_3 \quad \rightarrow \quad -\frac{\cos^5 x}{5} + C_3$$

Arnando la integral original tendremos :

$$\int sen^5 x.dx = -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

Ejemplo 2: Resolver $\int sen^3 x\cos x dx$

$u = senx \rightarrow du = \cos x$

Sustituyendo tenemos que :

$$\int sen^3 x\cos x dx = \int u^3 du = \frac{1}{4}u^4 + c = \frac{1}{4}sen^4 x + c$$

$$= \boxed{\frac{sen^4 x}{4} + C}$$

Caso 2. Si la potencia del coseno es impar y positiva, conservar un factor coseno y pasar los factores restantes a senos. Entonces, desarrollar e integrar.

$$\int sen^m x\cos^n x dx = \int sen^m x\cos^{2k+1} x dx = \int sen^m x\cos^{2k} x\cos x dx$$

$$= \int\left(\cos^2 x\right)^k \cos x sen^m x dx = \int sen^m x\left(1-sen^2 x\right)^k \cos x dx$$

www.elsolucionario.org

Ejemplo 3: Resolver $\int sen^5 x \cos^3 x dx$

Sacamos un factor coseno y lo otro lo convertimos en seno:

$$\int sen^5 x \cos^2 \cos x dx = \int sen^5 x(1 - s\,en^2 x)\cos x dx = \int (sen^5 x \cos x - sen^7 x \cos x) dx$$

$$\int sen^5 x \cos x dx - \int sen^7 x \cos x dx = \int u^5 du - \int u^7 du = \frac{u^6}{6} - \frac{u^7}{7} + C$$

Hacemos:

$$= \boxed{\frac{sen^6 x}{6} - \frac{sen^7 x}{7} + C}$$

$u = senx \rightarrow du = \cos x dx$

Caso 3. Si las potencias de ambos son pares y no negativas, usar repetidamente las identidades.

$$sen^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad y \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

Nota: para potencias diferentes consultar libros de tablas matemáticas.

www.elsolucionario.org

Ejemplo 4: Resolver $\int \cos^4 x.dx$

$$\int \cos^4 x.dx = \int \left(\cos^2 x\right)^2 .dx = \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 .dx = \frac{1}{4}\int \left(1+2.\cos 2x+\cos^2 2x\right).dx$$

$$\int \cos^4 x.dx = \frac{1}{4}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x.dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x.dx$$

a) $\frac{1}{4}\int dx = \frac{1}{4}x$

b) $\frac{1}{2}\int \cos 2x.dx \quad \begin{cases} u = 2x \\ du = 2.dx \rightarrow dx = \frac{du}{2} \end{cases}$

Sustituyendo y resolviendo: $\frac{1}{2}\int \cos u.\frac{du}{2} = \frac{1}{4}\int \cos u.du = \frac{1}{4}senu \rightarrow \frac{1}{4}sen2x$

c) $\frac{1}{4}\int \cos^2 2x.dx = \frac{1}{4}\int \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right).dx = \frac{1}{8}\left(\int dx + \int \cos 4x.dx\right) = \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x.dx$

$= \frac{1}{8}.x + \frac{1}{32}sen4x \quad \therefore$

$$\int \cos^4 x.dx = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}sen2x + \frac{1}{8}.x + \frac{1}{32}sen4x \rightarrow \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}sen2x + \frac{1}{32}sen4x + C$$

Ejemplo 5: Re*solver* $\int sen^2 x \cos^2 x dx$

Aplicamos la identidad del ángulo duplo:

$$sen^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \sim (2), \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \sim (3)$$

Sustituyendo (2) *y* (3) *en* (1) *tenemos que*:

$$\int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)dx = \int \frac{1-\cos^2 2x}{4}dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x)dx \sim (4)$$

Utilizamos la identidad del ángulo duplo otra vez:

$$\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2} \sim (5)$$

Sust. (5) en (4):

$\frac{1}{4}\int (1-\frac{1+\cos 4x}{2})dx = \frac{1}{4}\int (1-\frac{1}{2}-\frac{\cos 4x}{4})dx = \frac{1}{4}\int (1-\frac{1}{2}-\frac{\cos 4x}{4})dx$

$= \frac{1}{4}\int (\frac{1}{2}-\frac{\cos 4x}{4})dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \cos 4x dx = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\int \cos z dz = \underline{\frac{x}{8} - \frac{sen4x}{32} + C}$

Hacemos $z = 4x \rightarrow dz = 4dx$

De a hí que: $dx = \frac{dz}{4}$

www.elsolucionario.org

Integrales que contienen potencias de secante - tangente y cotangente – cosecante.

Caso 4. Si la potencia de la secante o cosecante es par y positiva y hay factores tangentes o cotangente, conservar un factor secante o cosecante cuadrado y convertir los factores restantes en tangente o cotangente. Entonces desarrollar e integrar.

$$\int \sec^{2k} x \tan^n x dx = \int (\sec^2 x)^{k-1} \tan^n x \sec^2 x dx = \int (1+\tan^2 x)^{k-1} \tan^n x \sec^2 x dx$$

Caso 5. Si la potencia de la tangente o cotangente es impar y positiva y hay factores secante o cosecante, se debe conservar un factor secante tangente o cosecante cotangente y convertir todos los demás en secante o secante y luego desarrollar e integrar.

$$\int \sec^m x \tan^{2k+1} x dx = \int \sec^{m-1} x (\tan^2)^k x \sec x \tan dx = \int \sec^{m-1} x (\sec^2 x - 1)^k \sec x \tan x dx$$

Caso 6. Si la tangente o cotangente están solas y su potencia (n) es cualquier entero positivo, se convierte un factor cuadrático de ellos en $\sec^2 x$ o $\csc^2 x$ y se deja todo lo demás en tangente o cotangente. Aplicar este proceso tantas veces sea necesario hasta obtener una tangente o cotangente de n=1, la cual se hará inmediatamente.

$$\int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x (\tan^2 x) dx = \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx$$

Caso 7. Si se tiene una integral de la forma $\int \sec^m x dx$ se aplican los siguientes criterios.

a) Para m par aplicar el caso 4
b) Para m impar aplicar la integración por parte.

Caso 8. Si ningunas de las guías anteriores aplican tratar de convertir el integrando en senos y cosenos.

www.elsolucionario.org

Ejemplo 6. Resuelva el siguiente integral.

$$\int \tan^2 x \sec^4 x dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x dx = \int \tan^2 x (1+\tan^2 x) \sec^2 x dx$$

$$= \int (\tan^2 x \sec^2 x + \tan^4 x \sec^2 x) dx = \int \tan^2 x \sec^2 x dx + \int \tan^4 x \sec^2 x dx \sim (a)$$

Hacemos:

$$\left.\begin{array}{l} u = \tan x \\ du = \sec^2 x dx \end{array}\right\rangle \sim (b) \qquad \textit{Sustituyendo } (b) \textit{ en } (a):$$

$$\int u^2 du + \int u^4 du = \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + C = \underline{\left| \frac{\tan^3 x}{3} + \frac{\tan^5 x}{5} + C \right|}$$

Ejemplo 7. Calcule el integral.

$$\int \tan^3 x \sec^3 x dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \sec x \tan x dx = \int (\sec^2 x - 1) \sec^2 x \sec x \tan x dx$$

$$= \int (\sec^4 \sec x \tan x - \sec^2 x \sec x \tan x) dx = \int \sec^4 x \sec x \tan x dx - \int \sec^2 x \tan x \sec x dx \sim (a)$$

Hacemos:

$$\left.\begin{array}{l} u = \sec x \\ du = \sec x \tan x dx \end{array}\right\rangle \sim (b) \qquad \textit{Sustituyendo } (b) \textit{ en } (a):$$

$$\int u^4 du - \int u^3 du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} + C = \underline{\left| \frac{\sec^5 x}{5} - \frac{\sec^3 x}{3} + C \right|}$$

www.elsolucionario.org

Cálculo Integral

Práctica: 5

Apellidos:..... Matrículas:.....

Grupo: .....Fecha: .....Profesor(a): .....

Integrales por parte y trigonometricas:

1. $\int x\text{sen}2x\text{d}x$ — $\text{R}: -\frac{x}{2}\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$
2. $\int x sen\left(\frac{x}{5}\right)dx$ — $\text{R}: -5x\cos\frac{x}{5} + 25\sin\frac{x}{5} + c$
3. $\int x\cos x dx$ — $\text{R}: xsenx + \cos x + c$
4. $\int 5e^{\frac{x^2}{2}}x^3 dx$ — $\text{R}: 5x^2 e^{\frac{x^2}{2}} - 10e^{\frac{x^2}{2}} + c$
5. $\int e^{\cos x} sen2x dx$ — $\text{R}: -2e^{\cos x}\left(\cos x - 1\right) + c$
6. $\int x^5 e^x dx$ — $\text{R}: ?$
7. $\int sen^5 x dx$ — $\text{R}: -\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c$
8. $\int sen^2 x\cos^4 x dx$ — $\text{R}: \frac{1}{8}\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}sen4x + \frac{1}{6}sen^3 2x + c\right]$
9. $\int \tan^5 x dx$ — $\text{R}: \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln\left|\cos x\right| + c$
10. $\int sen^3 x\cos^2 x dx$ — $\text{R}: \frac{1}{5}\cos^5 x - \frac{1}{3}\cos^3 x + c$
11. $\tan^6 x dx$ — $\text{R}: ?$
12. $\int \sec^6 x\tan^2 x dx$ — $\text{R}: ?$
13. $\int \sec^3 x$

www.elsolucionario.org

13) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$ R: $xTanx + \ln(\cos x)c$

14) $\int x^2 \arctan x dx$ R: $\frac{1}{3}x^3 \arctan x - \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + c$

15) $\int \ln^2 x dx$ R: $x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + c$

16) $\int x^3 \ln x dx$.....$\frac{x^4}{16}(4\ln x - 1) + c$

17) $\int arcsen2x dx$.....$x arcsen2x + \frac{1}{2}\sqrt{1-4x^2} + c$

18) $\int sen^5 2x \cos 2x \, dx$....$\frac{1}{12} \operatorname{sen}^4 2x + c$

19) $\int sen^4 \pi x dx$.....$\frac{1}{32\pi}(12\pi x - 8sen2\pi x + sen4\pi x)$

20) $\int Sec^2 x \operatorname{Tanx} dx$.....$\frac{1}{2}Tan^2 x + c$

21) $\int x^2 \ Cos3x dx$

22) $\int e^{-\theta} Cos2\theta dx$

"Tener hijos no nos convierte en padre, del mismo modo tener un piano no nos convierte en pianista".

(Michael Levine)

www.elsolucionario.org

Integrales que contienen los productos seno-coseno de ángulos distintos.

En este tipo de integrales es necesario convertir dicho producto en función de una suma. Su demostración está en el manual de precálculo en la parte de trigonometría. Aquí se dan las formulas directamente. Se debe tomar en cuenta que m y n son las veces que se repite un ángulo y que $m \neq n$.

Fórmulas 17 : Productos

$$sen\ mx.sen\ nx = \tfrac{1}{2}(\cos[m-n]x - \cos[m+n]x)$$

$$sen\ mx\ .\cos nx = \tfrac{1}{2}(sen[m-n]x + sen[m+n]x)$$

$$\cos mx.\cos nx = \tfrac{1}{2}(\cos[m-n]x + \cos[m+n]x)$$

Ejemplo: Resolver las siguientes integrales.

1) $\int Sen\ 8x \cdot Sen\ 5x\ dx$

$$Senmx \cdot Sennx = \frac{1}{2}\left[Cos(m-n)x - Cos(m+n)x\right]$$

$$\int Sen\ 8x \cdot Sen\ 5x.dx = \frac{1}{2}\left[Cos(8-5)x - Cos(8+5)x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[Cos3x\ dx - Cos13x\,dx\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{3}Cos\,u\,du - \frac{1}{13}Cos\,Z\,dz\right]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(Sen\,u) - \frac{1}{13}(Sen\ z) + c\right]$$

$$= \frac{1}{6}Sen\,u - \frac{1}{26}Sen\ Z$$

$$= \frac{1}{6}Sen\,3x - \frac{1}{26}Sen\ 13x + c$$

$$\left.\begin{array}{l} Cos\ 3x\ dx \\ u = 3x \\ du = 3dx \\ dx = du \end{array}\right\} \frac{1}{3}\ Cosu\ du$$

www.elsolucionario.org

$2)\int Sen6x \cdot Cos2xdx$

$$Senmx \cdot Cosnx = \frac{1}{2}\left[Sen(m-n)x + Sen(m+n)x\right]$$

$$\int Sen6x \cdot Cos2x = \frac{1}{2}[Sen4xdx + Sen8xdx]$$

$Sen4xdx$

$u = 4x \qquad \left[\frac{1}{4}Sen \cdot u \cdot du\right]\frac{1}{2}$

$du = 4dx$

$dx = \frac{du}{4}$

$$\frac{1}{8}Cos4x - \frac{1}{16}Cos8x$$

$3).\int Cos10x \cdot Cos3xdx$

$$Cosmx \cdot Cosnx = \frac{1}{2}\int Cos(m-n)x + Cos(m+n)x$$

$$Sen10x \cdot Cos3x = \frac{1}{2}\int Cos7xdx + \frac{1}{2}\int Cos13xdx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}Sen7x\right) + \frac{1}{2}(Sen16x)\left(\frac{1}{13}\right)$$

$$\frac{1}{14}Sen7x + \frac{1}{26}Sen13x + c$$

- Transformarte en la persona que tu realmente quieres ser

www.elsolucionario.org

Método de sustitución trigonométrica inversa.

Para aplicar el método es necesario usar el Teorema de Pitágoras y las identidades trigonométricas. Se hará uso de un triángulo rectángulo desde donde se sacaran todas las funciones que serán sustituidas en el ejercicio.

Ejemplo1: Resuelve $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

$Sen\theta = \frac{x}{4}$ $\quad x = 4\text{sen}\emptyset$ $\quad dx = 4Cos\emptyset d\emptyset$ Sustituyendo en la integral!

$$\int \frac{4\cos\theta d\theta}{\sqrt{16-(4Sen\theta)^2}}$$

$$\int \frac{4\cos\theta d\theta}{\sqrt{16-16Sen^2\theta}}$$

$$\int \frac{4\cos\theta d\theta}{\sqrt{16-(1-Sen^2\theta)}}$$

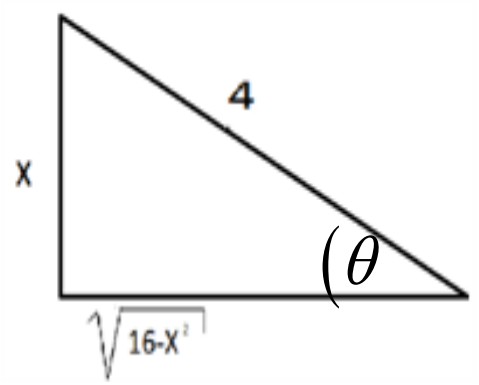
$$\int \frac{4\cos\theta d\theta}{4\sqrt{(1-Sen^2\theta)}} = \int \frac{Cos\theta d\theta}{\sqrt{Cos^2\theta}}$$

$$= \int \frac{Cos\theta d\theta}{Cos\theta} = \int d\theta = \theta + C$$

$$= arcSen\left(\frac{x}{4}\right) + C \rightarrow aplicamos\ \ la\ \ inversa$$

$$arcSen\theta = arcSen\frac{x}{4}$$

$$\theta = \frac{arcSenx}{4}, solucion: \boxed{arcSen\frac{x}{4} + C}$$



www.elsolucionario.org

Ejemplo 2 : Resuelve $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

Haciendo sustituciones de $Sen\theta = \frac{x}{2}$,$x = 2Sen\theta$, dx = $2\cos\theta d\theta$

Ahora sustituyendo en la integral se tiene que :

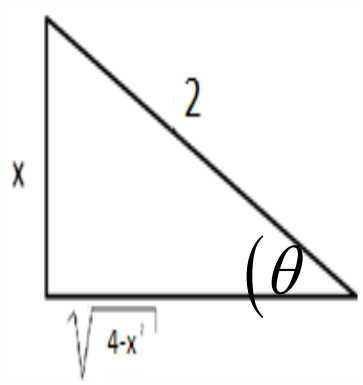
$$= \int \frac{2Cos\theta d\theta}{(2Sen\theta)^2\sqrt{4-(2Sen^2\theta)}}$$

$$= \int \frac{2Cos\theta d\theta}{4Sen^2\theta\sqrt{4-4Sen^2\theta}}$$

$$= \int \frac{2Cos\theta d\theta}{4Sen^2\theta\sqrt{(4)1-Sen^2\theta}}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{2Cos\theta d\theta}{Sen^2\theta(2)\sqrt{Cos^2\theta}}$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{Cos\theta d\theta}{Sen^2\theta Cos\theta} = \frac{1}{4}\int \frac{d\theta}{Sen^2\theta}$$



Ahora aquí debemos aplicar identidades trigonométricas, pues recordemos

que $\frac{1}{senx} = Coscx \therefore \frac{1}{4}\int \cos ec^2\theta d\theta$

$$= \frac{1}{4}Cot\theta + c, peroCot\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

solución : $\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x} + C$

www.elsolucionario.org

Ejemplo 3: Resuelve $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}} dx$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+25}} dx = \int \frac{(5\tan\theta)^3}{\sqrt{(5\tan\theta)^2+25}} (5\sec^2\theta d\theta)$$

$$\int \frac{(5)(25\tan^3\theta)\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{25\tan^2\theta+25}}$$

$$= \int \frac{(5)125\tan^3\theta\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{(25)(\tan^2\theta+1)}}$$

$$= 125\int \tan^3\theta\sec\theta = 125\int \tan^2\theta\sec\theta\tan\theta d\theta$$

$$= 125\int (\sec^2-1)\sec\theta\tan\theta d\theta$$

$$= 125\int \sec^2\theta\sec\theta\tan\theta d\theta - 125\int \sec\theta\tan\theta d\theta$$

$$= u = \sec\theta; du = \sec\theta\tan\theta d\theta \rightarrow \int u^2 du - \int du$$

$$125\int u^2 du - 125\sec\theta$$

$$= \frac{125u^3}{3} - 125\sec\theta + c$$

$$\frac{125}{3}\left(\frac{\sqrt{x^2+25}}{5}\right)^3 - \frac{125}{5}\sqrt{x^2+25}$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{x^2+25}\right]^3 - 25\sqrt{x^2+25} + c$$

www.elsolucionario.org

Integración por Tabla

El método de sustitución trigonométrica puede ser muy útil cuando aparecen expresiones algebraicas como la siguientes, sabiendo que $u = u(x)$. Lo que debemos es memorizar estas fórmulas y en vez de irnos por el método anterior, sustituir tal como la igualdad.

18) $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left[\frac{u}{a}\right]+C$

19) $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}.\ln\left(\frac{u-a}{u+a}\right)+C$

20) $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left[\frac{a+u}{a-u}\right]+C$

21) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = arcsen\left(\frac{u}{a}\right)+c$

22) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \ln\left(u+\sqrt{u^2+a^2}\right)+C$

23) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \ln\left(u+\sqrt{u^2-a^2}\right)+C$

24) $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}arc\sec\frac{|u|}{a}+C$

25) $\int Ln\,u\,du = u\,Lnu - u + C$

Ejemplo 1. Resolver las siguientes integrales:

La descomponemos en dos integrales en la cual en la primera aplicamos la fórmula 1 y en la otra una integral por sustitución.

$$\int \frac{1+2x}{1+x^2}dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx + \int \frac{2x}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + L(1+x^2)+C$$

Integrales que contienen polinomios cuadráticos.

Muchas integrales que contienen una raíz cuadrada o potencias negativas de un polinomio de la forma ax^2+bx+c se pueden simplificar con el proceso de completar cuadrado. Tienen la forma $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ ó $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Ejemplos: Resolver las siguientes integrales.

1) $\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = Tan^{-1}(x+1)+c$

2) $\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = Tan^{-1}(x+2)+c$

3) $\int \frac{dx}{x^2+6x+13} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+4} = \frac{1}{2}Arc\tan(\frac{x+3}{2})+c$

www.elsolucionario.org

4) $\int \frac{dx}{x^2-4x+7}$ Podemos escribir el denominador como la suma de dos cuadrados donde tenemos que $(x-2)^2+3=u^2+a^2$.

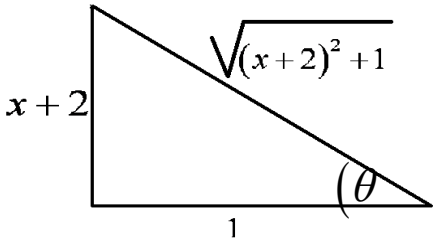
En esta forma de cuadrados completados tenemos que
$u=x-2$ *y* $a=\sqrt{3}$ *por lo tanto*

$$\int \frac{dx}{x^2-4x+7}=\int \frac{dx}{(x-2)^2+3}=\frac{1}{\sqrt{3}}Arc\tan(\frac{x-2}{\sqrt{3}})+C$$

5) *Encuentre la integral de* $\int \frac{5-3x}{x^2+4x+5}dx$

Completando al cuadrado el denominador para transformarlo en el tema anterior. Descomponiendo distributivamente

$$x^2+4x+5$$
$$\left(x^2+4x+4\right)+1$$
$$(x+2)^2+1$$
$$\int \frac{5-3x}{5x^2+4x+5}dx=\int \frac{5-3x}{(x+2)^2+1}dx$$



$$\tan\theta=x+2$$
$$x=\tan\theta-2$$
$$dx=\sec^2\theta d\theta$$

$$5\int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\tan^2\theta+1}-3\int \frac{\tan\theta-2\sec^2\theta d\theta}{\tan^2\theta+1}$$
$$=5\int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\sec^2\theta+1}-3\int \frac{(\tan\theta-2)\sec^2\theta d\theta}{\sec^2\theta}$$
$$=5\int d\theta-3\int(\tan\theta-2)d\theta$$
$$=5\theta+3\int \frac{sen\theta}{\cos\theta}d\theta+6\int d\theta$$
$$=5\theta+3\int \frac{du}{u}$$

$$=11\theta+3\ln u+c$$
$$u=\cos\theta$$
$$du=-sen\theta d\theta$$
$$\theta=\arctan(x+2)$$
$$11\theta+3\ln\cos\theta+c$$

$$\boxed{11\arctan(x+2)+3\ln\left(\frac{1}{\sqrt{(x+2)^2+1}}\right)+c}$$

www.elsolucionario.org

Ejemplo 6 : $\int \frac{2x-1}{4x^2+4x-15}$

$4x^2+4x-15$

$4x^2+4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2-15$

$(2x+2)^2-19=4x^2+2(2x)(2)+4-19$

$x^2+x-\frac{15}{4}=x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{15}{4}$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)-4$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-4$

$=x^2+2(1)\left(\frac{1}{2}\right)x+\frac{1}{4}-4$

$=\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)-\frac{15}{4}$

$=4x^2+4x$

$\int \frac{2x-1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-4}dx$

Transformado

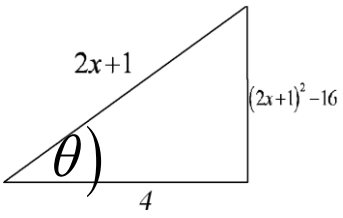
$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-4=(2x+1)^2-16$

$\int \frac{2x-1}{(2x+1)^2-16}dx$

$\sec\theta=\frac{2x+1}{4},\quad 4\sec\theta=2x+1,\quad 4\sec\theta-1=2x$

$4\frac{d}{dx}\sec\theta-\frac{d}{x}(1)=2dx$

$4\sec\theta\tan\theta=2dx$



Solucion

$\int \frac{2x-1}{(2x+1)^2-16}dx$

$=\int \frac{(4\sec\theta-2)2\sec\theta\tan\theta d\theta}{(4\sec\theta)^2-16}$

$=\int \frac{(4\sec\theta-2)(2\sec\theta+\tan\theta)d\theta}{16\sec^2\theta-16}$

$=\frac{1}{16}\int \frac{(4\sec\theta-2)(2\sec\theta+\tan\theta)d\theta}{\tan^2\theta}$

$=\frac{1}{16}\int \frac{(4\sec\theta-2)2\sec\theta d\theta}{\tan^2\theta}$

$=\frac{4}{8}\int \frac{(\sec^2\theta d\theta)}{\tan^2\theta}-\frac{2}{8}\int \frac{\sec\theta d\theta}{\tan\theta}$

$=\frac{1}{2}\int \frac{(\sec^2\theta d\theta)}{\tan^2\theta}-\frac{1}{4}\int \frac{1/\cos\theta}{sen\theta/\cos\theta}d\theta$

$u=\tan\theta; du=\sec^2\theta d\theta$

$=\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}-\frac{1}{4}\int \frac{1}{sen\theta}d\theta$

$=\frac{1}{2}\ln u-\frac{1}{4}\int \cos c\theta d\theta$

$=\frac{1}{2}\ln\tan\theta+\frac{1}{4}\ln(\cos c+\cot\theta)+c$

www.elsolucionario.org

Método de fracciones parciales

Función racional: Es una función que puede expresarse como el cociente de dos polinomios. Es decir,

$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$; Donde $P(x)\ y\ Q(x)$ son polinomios.

El ***método de fracciones parciales:*** Es una técnica algebraica que descompone un polinomio $R(x)$ en una suma de términos. Nos permite integrar cierta clase de funciones racionales

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=p(x)+F_1(x)+F_2(x)+...+F_k(x)$$

Donde $p(x)$ es un polinomio y $F_i(x)$ es una expresión que puede integrarse con facilidad.

Esta integral cuyo integrando, está constituido por expresiones fraccionarias, que por lo general son de fácil solución.

Al momento de intentar resolver este tipo de integrales, es importante tener en cuenta los siguientes criterios:

- **Criterio1**: Si el numerador de la integral dada, es de menor grado que el denominador, se debe –si es posible- aplicar el proceso de factorización.
- **Criterio2**: Si el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, se debe resolver primero la división de polinomios.

Fracción parcial Simple: Es cualquier fracción propia de polinomios, es decir, el grado del numerador es estrictamente menor que el grado del denominador.

Así, $\frac{3}{x+4};\frac{5x-2}{x^2+x+3};\frac{x-3}{(2x+1)^3}$.

www.elsolucionario.org

Muchas veces la dificultad al resolver integrales por este método, estriba en que el estudiante debe tener conocimientos previos de precálculo el cual debe dominar, por lo menos, una técnica que le permita resolver los sistemas de ecuaciones, que se generan al momento de intentar calcular dichas constantes.

Una vez determinadas las mencionadas constantes, se obtienen integrales que por lo general se resuelven aplicando los métodos ya expuestos, por esta razón, es conveniente que el estudiante los domine todos.

Descomponer factorialmente el polinomio *q(x)*, es decir, se hallan las raíces de la ecuación *q(x)* = 0, el cual es el denominador. Al realizar la mencionada descomposición, es posible encontrar resultados distintos y éstos se pueden clasificar en cuatro casos:

Primer caso:

1. **Fracción impropia**: Si p(x)/q(x) es una fracción impropia (es decir, si el grado de numerador es mayor o igual al grado del denominador), dividir el denominador para obtener

$$\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$$

Donde: *p(x)* es el dividendo, *q(x)* el divisor, *c(x)* el cociente y *r(x)* el resto y se cumple que q(x) es de mayor grado que r(x). Ahora aplicando el símbolo integral a ambos miembros y los respectivos diferenciales, se obtiene:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \int \left[c(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \right] dx = \int c(x)dx + \int \frac{r(x)}{q(x)} dx$$

www.elsolucionario.org

Ejemplo 1: Resuelve $\int \frac{x^2+1}{x-1}dx$

Se resuelve realizando previamente la división, a través de la cual obtenemos el cociente x+1 y el resto 2 que es símbolo de $\frac{p(x)}{q(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$

$$\int \frac{x^2+1}{x-1}dx = \int (x+1+\frac{2}{x-1})dx = \frac{x^2}{2} + x + 2L|x-1| + C$$

Ejemplo 2: Resuelva $\int \frac{x^2+x+3}{x-2}dx$

Dividimos el numerador por el denominador y luego aplicamos integramos cada parte.

$$\frac{x^2+x+3}{x+2} = (x+3) + \frac{9}{x-2}$$

$$\int \frac{x^2+x+3}{x-2}dx = \int (x+3) + \frac{9}{x-2}dx$$

$$\int (x+3)\,dx + 9\int \frac{dx}{x-2}$$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + 9\ln(x-2) + c$$

www.elsolucionario.org

2do Caso: Factores lineales.

2.a) Factores en el denominador lineales distintos. La integral dada debe escribirse en función de un cociente compuesto por: Constantes (A, B, C, etc) en el numerador y dichos factores en el denominador. Como se muestra a continuación:

Q_x es un polinomio que tiene raíces reales distintas, es decir, $Q_x=(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)...(x+a_n)$, por lo tanto:

$$\frac{Px}{Qx}=\frac{A_1}{x+a_1}+\frac{A_2}{x+a_2}...\frac{x+a_n}{x_n+a_n}\quad \text{Integrando}\int\frac{Px}{Qx}dx=\int(\frac{A_1}{x+a_1}+\frac{A_2}{x+a_2}...\frac{x+a_n}{x_n+a_n})dx$$

Ejemplo 3: Re*solver* $\int\frac{1}{x^2+x-6}dx$

Factorizamos el polinomio que est*á* enel denominador.

$x^2+x+6=(x+3)(x-2)$

$$\int\frac{1}{x^2+x+6}dx=\int\frac{1}{(x+3)(x-2)}dx$$

$$=\int\left[\frac{A}{(x+3)}+\frac{B}{(x-2)}\right]dx\rightarrow$$

$A(x-2)+B(x+3)=1\rightarrow Ax-2A+Bx+3B=1$

El coeficiente de x es $0x+1$, multiplicando por $(x+3)(x-2)$

Como mas abajo se formo un sistema de ecuaciones:

$$A+B=0$$

$$-2A+3B=1$$

$$B=\frac{1}{5};A=-\frac{1}{5};\therefore=-\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x+3}+\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x-2}$$

$$\boxed{=-\frac{1}{5}\ln|x+3|+\frac{1}{5}\ln|x-2|+c}$$

$$=-\ln\sqrt[5]{x+3}+\ln\sqrt[5]{x-2}+c\therefore$$

$$\int\frac{1}{x^2+x-6}dx=\ln\sqrt[5]{\frac{(x-2)}{(x+3)}}+c$$

www.elsolucionario.org

Ejemplo 4: Resolver $\int \frac{dx}{x^2-16}$

$$x^2-16=(x-4)(x+4)$$

$$\int \frac{1}{(x-4)(x+4)}dx$$

$$\frac{1}{x^2-16}=\frac{A}{(x+4)}+\frac{B}{(x-4)}$$

$$1=A(x-4)+B(x+4)$$

$$1=Ax-4A+Bx+4B$$

$$Ax+Bx=0x$$

$$x(A+B)=0$$

$$A+B=0$$

$$A+B=0 \Rightarrow \cancel{4A}+4B=0$$

$$-4A+4B=1 \Rightarrow \cancel{-4A}+4B=1$$

$$8B=1$$

$$A=-\frac{1}{8} \qquad \boxed{B=\frac{1}{8}}$$

$$\frac{1}{x^2-16}=\frac{-\frac{1}{8}}{x+4}+\frac{\frac{1}{8}}{x-4}$$

$$-\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x+4}+\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x-4}=-\frac{1}{8}\ln x+4+\frac{1}{8}\ln x-4$$

$$\boxed{=-\frac{1}{8}\ln(x+4)+\frac{1}{8}\ln(x-4)+c}$$

www.elsolucionario.org

Ejemplo 5 : Re *solver* $\int \frac{4x^2-18x+38}{x^3+x^2-5x+3}dx$

$$\int \frac{4x^2-18x+38}{x^3+x^2-5x+3}dx = \int \frac{4x^2-18x+38}{(x+3)(x-1)^2}dx = \int \frac{4x^2-18x+38}{(x+3)(x-1)^2}dx$$

$\rightarrow$ Re *solviendo* alg *ebraicamente* $\frac{4x^2-18x+38}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} \therefore$

$$A(x-1)(x-1)^2 + B(x+3)(x-1)^2 + C(x+3)(x-1) = 4x^2-18x+38$$

Operando y luego resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} A + B = 4 \\ -2A+2B+C = -18 \\ A-3B+3C = 38 \end{cases}$$

$A = 8, \quad B = -4, \quad c = 6$

$$= 8\int \frac{dx}{x+3} - 4\int \frac{dx}{(x-1)} + 6\int \frac{dx}{(x-1)^2}$$

$$= 8\ln(x+3) - 4\ln(x-1) + 6\int (x-1)^{-2}dx + c$$

$$= \ln(x+3)^8 - \ln(x-1)^4 + 6\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + c$$

$$= \boxed{\ln\frac{(x+3)^8}{(x-1)^4} + \frac{6}{x-1} + C}$$

www.elsolucionario.org

Método de Heaviside para factores lineales distintos.

Si se tienen funciones parciales $\frac{P(x)}{R(x)}$ sumando el grado de $\mathrm{p}(x) \angle R(x)$ y los factores de $R(x)$ son todos lineales distintos

$\mathrm{R}(x)=(x+a)(x+b)(x+c),,,(x+z)$.

para aplicar este metodo hacer los siguientes pasos:

1. Escribir el cociente $\mathrm{R}(x)$ en forma factorizada:

$$\frac{P(x)}{R(x)}=\frac{p(x)}{(x+a)(x+b)(x+c),,,(x+z)}$$

2. Eliminar uno a uno los factores de $\mathrm{R}(x)$, reemplazando cada (x) en los factores por el numero que la elimina.

$$A=\frac{p(x)}{(x+b)(x+c),,,(x+z)} \text{ cuando } x=-a$$

$$B=\frac{p(x)}{(x+a)(x+c),,,(x+z)} \text{ cuando } x=-b$$

$$C=\frac{p(x)}{(x+a)(x+b),,,(x+z)} \text{ cuando } x=-c$$

3. Escribir el desarrollo de $\frac{P(x)}{R(x)}$ como:

$$\frac{P(x)}{R(x)}=\frac{A}{(x+a)}+\frac{B}{x+b}+\frac{C}{(x+c)}+,,,+\frac{Z}{(x+z)}$$

Ejemplo: resolver $\int \frac{x^2+3x-10}{x^3+2x-x-2}dx$

por el metodo de Hearside.

$$\int \frac{x^2+3x-10}{x^3+2x-x-2}dx=\int \frac{x^2+3x-10}{(x-1)(x+1)(x+2)}dx$$

Como todos son lineales distintos podemos aplicar este metodo.

$$\frac{x^2+3x-10}{(x-1)(x+1)(x+2)}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x+2)}$$

$\mathrm{A} \rightarrow$ cuando $x=1$ es el valor que la anula

$$\mathrm{A}=\frac{x^2+3x-10}{(x+1)(x+2)}=\frac{-6}{6}=-1$$

www.elsolucionario.org

B cuando $x=-1$ es el valor que la anula

$$B=\frac{x^2+3x-10}{(x-1)(x+2)}=\frac{-12}{-2}=6$$

C cuando $x=-2$ es el valor que la anula.

$$C=\frac{x^2+3x-10}{(x-1)(x+1)}=\frac{-12}{3}=-4$$

$$=\int\left(\frac{-1}{(x-1)}+\frac{6}{(x+1)}+\frac{-4}{(x+2)}\right)dx=$$

$$-\int\frac{dx}{x-1}+6\int\frac{dx}{x+1}-\int\frac{dx}{x+2}=$$

$$6\ln(x+1)-\ln(x-1)-\ln(x+2)+c$$

$$6\ln(x+1)-(\ln(x-1)+\ln(x+2))+c$$

$$\therefore$$

$$\int\frac{x^2+3x-10}{x^3+2x-x-2}dx=\ln\left[\frac{(x+1)^2}{(x-1)(x+2)}\right]+c$$

2.b) Factores lineales repetidos en el denominador.

Para cada factor lineal $(px+q)^m$, la descomposición en fracciones simples debe incluir la suma siguiente de **(m=n)** fracciones.

$$\frac{A_1}{(px+q)}+\frac{A_2}{(px+q)^2}+\ldots+\frac{A_m}{(px+q)^m}$$

La integral dada debe escribirse en función de un cociente compuesto por: Constantes (A, B, C, etc) en el numerador y dichos factores en el denominador, como se muestra a continuación:

$$\int\frac{p(x)}{q(x)}=\int\frac{A}{(ax+b)}+\int\frac{B}{(ax+b)^2}+\ldots+\int\frac{z}{(ax+b)^n}$$

www.elsolucionario.org

Ejemplo : Re *solver* $\int \frac{x^5}{(x-1)^3}dx$

$\int \frac{x^5}{(x-1)^3}dx = \int \frac{x^5}{x^3-3x^2+3x-1}$, *dividiendo tenemos*

$$\begin{array}{rl} \cancel{x^5} & \left| x^3-3x^2+3x-1 \right. \\ \cancel{-x^5}+3x^4-3x^3+x^2 & x^2+3x+6 \\ \cancel{3x^4}-3x^3+x^2 & \\ \cancel{-3x^4}+9x^3-9x^2 & \\ \cancel{6x^3}-8x^2+3x & \\ \cancel{-6x^3}+18x^2-18x+6 & \\ 10x^2-15x+6 & \end{array}$$

Aplicando int *egrales* :

$$= \int \left(x^2+3x+6\right)dx + \int \frac{10x^2-15x+6}{(x-1)^3}dx = \frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+6x+\int \frac{10x^2-15x+6}{(x-1)^3}dx$$

$$= \int \frac{10x^2-15x+6}{(x-1)^3} = \int \frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}dx$$

Multiplicar *por* $(x-1)^3$

$$10x^2-15x+6 = A(x-1)^2+B(x-1)+C$$
$$10x^2-15x+6 = A\left(x^2-2x+1\right)+Bx-B+C$$
$$10x^2-15x+6 = Ax^2-2Ax+A+Bx-B+C$$

Se formó un sistema de ecuacion de 3*3 cuya solucion será:

$-2A+B=15$

$A-B-C=6$ $\qquad A=10, B=5, C=1$

$B=-15+2A$

$$\rightarrow \int \frac{10dx}{(x-1)}+\int \frac{5dx}{(x-1)^2}+\int \frac{1dx}{(x-1)^3} = 10\int \frac{dx}{(x-1)}+5\int \frac{dx}{(x-1)^2}+\int \frac{dx}{(x-1)^3}$$

$$= 10\ln(x-1)+5\int (x-1)^{-2}dx+\int (x-1)^{-3}dx$$

$$= 10\ln(x-1)+5\left(\frac{x-1}{-1}\right)^{-1}+\left(\frac{x-1}{-2}\right)^{-2}$$

$$= 10\ln x-1-\frac{5}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}+c$$

$$\boxed{= \frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+6x+10\ln x-1-\frac{5}{x-1}-\frac{1}{2(x-1)^2}+c}$$

www.elsolucionario.org

Método de la diferenciación en factores lineales repetidos.

Este es otro método de determinar las constantes que aparecen en las fracciones parciales.

Ejemplo:Resolver $\int \frac{x^2+3x-4}{(x-2)^3}dx$

solucion:

$$\int \frac{x^2+3x-4}{(x-2)^3}dx = \int\left(\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}\right)dx$$

Ahora se procede a eliminar las fracciones
para determinar el valor de las constantes A,B,C

$$x^2+3x-4 = A(x-2)^2+B(x-2)+C$$

a) Para encontrar el valor de C basta con buscar un valor de X que anule todas las demas constantes en este caso seria x=2 y sustituimos

$$A(x-2)^2+B(x-2)+C = x^2+3x-4$$

$$x = 2$$

$$A(0)+B(0)+C = 6$$

$$c = 6$$

www.elsolucionario.org

b) Ahora se deriva la misma expresión de $\boxed{a}$ en ambos lados.

$2A(x-2)+B+0=2x+3$

$2A(x-2)+B=2x+3$

Como se puede observar para obtener a B
se sustituye x=2 para eliminar la constante
A y asi se obtiene el valor de B.

$2A(2-2)+B=2(2)+3$

$B=7$

c) Para obtener C

$2A(x-2)+B=2x+3$ derivar

$2A=2$

$A=1$

Eso implica que:

$$\int\left(\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}dx\right)=$$

$$\int\frac{1}{(x-2)}dx+\int\frac{7}{(x-2)}dx+\int\frac{6}{(x-2)^3}dx=$$

$$\int\frac{dx}{x-2}+7\int\frac{dx}{(x-2)^2}+6\int\frac{dx}{(x-2)^3}$$

$$I_1=\int\frac{dx}{x-2}=\ln(x-2)+c$$

$$I_2=\int\frac{dx}{(x-2)^2}=\int\frac{dz}{(z)^2}=\int z^{-2}dz=\frac{z^{-1}}{-1}$$

$$z=x-2;\qquad =-\frac{1}{z}=-\frac{1}{x-2}$$

$d_z dx$

$$I_3=\int\frac{dx}{(x-2)^3}=-\frac{1}{2(x-2)^2}$$

$$\int\frac{x^2+3x-4}{(x-2)^2}dx=I_1+I_2+I_3=\ln(x-2)-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{2(x-2)^2}+C$$

www.elsolucionario.org

3cer caso Factores cuadráticos

3a) Factores cuadráticos repetidos.

La descomposición en fracciones simples debe incluir la suma siguiente de n fracciones en $(ax^2+bx+c)^n$.

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)}+\frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\frac{W_X+Z}{(ax^2+bx+c)^n}$$

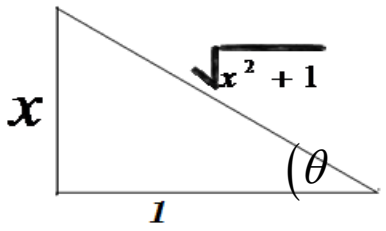
La integral dada debe escribirse en función de un cociente compuesto por: Polinomios de grado uno en el numerador y dichos factores en el denominador, como se muestra a continuación:

$$\int\frac{p(x)}{q(x)}=\int\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)}+\int\frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2}+\ldots+\int\frac{Wx+Z}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$Ejemplo:\text{Re}solver\int\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}dx$

Multiplicamos por $(x+1)(x^2+1)$

$$1=A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)$$
$$A+B=0$$
$$B+C=0$$
$$A+C=1$$
$$si A=\frac{1}{2};B=-\frac{1}{2};C=\frac{1}{2}\Rightarrow$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{x}{x^2+1}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}$$
$$u=x^2+1$$
$$du=2x$$
$$\frac{du}{2}=xdx$$



$$\int\frac{dx}{x^2+1}$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{du/2}{u}+\frac{1}{2}\arctan x$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x+1)-\frac{1}{4}\int\frac{du}{u}+\frac{1}{2}\arctan x+c$$
$$=\ln\sqrt{x+1}-\frac{1}{4}\ln u+\frac{1}{2}\arctan x+c$$
$$=\ln\sqrt{x+1}-\ln\sqrt{x^2+1}+\frac{\arctan x}{2}+c$$
$$\boxed{=\ln\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x^2+1}}+\frac{\arctan x}{2}+c}$$

www.elsolucionario.org

3B) Factores cuadráticos distintos. La integral dada debe escribirse en función de un cociente compuesto por: Polinomios de grado uno, en el numerador y dichos factores en el denominador, como se muestra a continuación:

❖ $$\int \frac{p(x)}{q(x)} = \int \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \int \frac{Cx+D}{cx^2+dx+e} + \ldots$$

Para cada factor cuadrático $(ax^2+bx+c)^n$, Factorizar completamente el denominador en fracciones de los tipos:

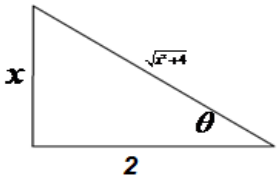
$(px+q)^m \quad y \quad (ax^2+bx+c)^n$ $donde\ ax^2+bx+c\ es\ irreducible$ y recordando que Cuando tengamos denominadores que nos den raíces complejas entonces tendremos $Ax+B, Cx+D$ sobre el polinomio.

Ejemplo 7: Calcula la integral.

$$\int \frac{2x^3+5x^2+16x}{x^5+8x^3+16x}dx$$

$$= \int \frac{x\left(2x^2+5x+16\right)}{x\left(x^4+8x^2+16\right)}dx$$

$$= \int \frac{2x^2+5x+16}{\left(x^2+4\right)^2}$$



$$= \int \frac{Ax+B}{x^2+4} + \frac{Cx+D}{\left(x^2+4\right)^2}dx$$

$$Mult.por\left(x^2+4\right)^2$$

$$(Ax+B)\left(x^2+4\right)+(Cx+D) = 2x^2+5x+16$$

$$A=0, B=2, C=5$$

$$\tan\theta = \frac{x}{2} \rightarrow x = 2\tan\theta \rightarrow dx = 2\sec^2\theta d\theta$$

$$u = x^2+4 \rightarrow \frac{du}{2} = xdx$$

www.elsolucionario.org

$$\int \frac{2}{x^2+4}dx + \int \frac{5x+4}{\left(x^2+4\right)^2}dx$$

$$2\int \frac{dx}{x^2+4} = 2\int \frac{2\sec^2\theta d\theta}{\left(2\tan\theta\right)^2+4}$$

$$= 4\int \frac{\sec^2\theta d\theta}{4\tan^2\theta+4}$$

$$= \frac{4}{4}\int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\tan^2\theta+1} = \int d\theta = \theta + c$$

$$= \arctan\tfrac{x}{2} + c$$

$$5\int \frac{x}{\left(x^2+4\right)}dx + 8\int \frac{dx}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$= \frac{5}{2}\int \frac{du}{u^2} + 8\int \frac{2\sec^2\theta d\theta}{4\sec^2\theta}\theta$$

$$= \frac{5}{2}u^{-1} + 16\int \frac{\sec^2\theta d\theta}{16\sec^4\theta}$$

$$= \int \frac{d\theta}{\sec^2\theta} = \int \frac{d\theta}{1/\cos^2\theta} = \int \cos^2\theta d\theta$$

$$= \int \frac{1+\cos^2\theta}{2}d\theta = \frac{1}{2}\int d\theta + \frac{1}{2}\int \cos 2\theta d\theta$$

$$z = 2\theta; \frac{dz}{2} = d\theta; = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}senz$$

$$dz = 2d\theta \qquad \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}sen2\theta$$

$$= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{4}sen\left(2\arctan\frac{x}{2}\right) + c$$

$$= \frac{3}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{5}{2\left(x^2+4\right)} - \frac{1}{4}sen\left(2\arctan\frac{x}{2}\right) + c$$

www.elsolucionario.org

Ejemplo 8: Resolver la siguiente integral $\int \frac{x^2-3x+2}{x^5-x^4-x+1}dx$

Factorizando el denominador aplicando unos de los métodos ya conocidos como es el método de Ruffini tenemos que: $x^5-x^4-x+1=(x+1)(x-1)^2(x^2+1)$

por lo que tenemos. $\int \frac{x^2-3x+2}{(x+1)(x-1)^2(x^2+1)}dx$ Observando cada uno de los miembros del divisor lo expresaremos en la forma.

$$\frac{Q_{(x)}}{R_{(x)}}=\frac{A}{x+a}+\frac{B}{x+b}+\frac{C}{(x+b)^2}+\frac{M_x+n}{x^2+d}$$

Ha de hacer notar que la última parte tiene esa forma por tener raíces complejas.

$$\int \frac{x^2-3x+2}{(x+1)(x-1)^2(x^2+1)}dx=\int\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{M_x+n}{x^2+1}\right)dx \text{ por lo tanto}$$

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{M_x+n}{x^2+1}=\frac{x^2-3x+2}{(x+1)(x-1)^2(x^2+1)}$$

$$A(x-2)^2(x^2+1)+B(x-1)(x+1)(x^2+1)+C(x+1)(x^2+1)+(M_x+N)(x+1)(x^2-2x+1)=$$
$$x^2-3x+2$$
$$A(x^2-2x+1)(x^2+1)+B(x^2-1)(x^2+1)+C(x^3+x^2+1)+(M_x+N)(x+1)(x^2-2x+1)=$$
$$x^2-3x+2$$
$$A(x^4-2x^3-2x^2-2x+1)+B(x^4-1)+C(x^3+x^2+x+1)+M(x^4-x^3-x+1)+N(x^3-x^2-x+1)=$$
$$x^2-3x+2$$

www.elsolucionario.org

Ahora se forma un sistema de ecuación

$$\begin{array}{rrrrrr} A & +B & & +M & & =0 \\ -2B & & +C & -M & +N & =0 \\ 2A & & +C & & +N & =1 \\ -2B & & +C & -M & -N & =-3 \\ A & -B & +C & +M & +N & =2 \end{array}$$

Ponerlo en forma para resolver por Gauss.

$$\begin{array}{rrrrrr} A & +B & +0C & +M & +0N & =0 \\ -2A & +0B & +C & -M & +N & =0 \\ 2A & +0B & +C & +0M & +N & =1 \\ -2A & +0B & +C & -M & -N & =-3 \\ A & -B & +C & +M & +N & =2 \end{array}$$

Resolviendo el sistema obtenido obtuvimos:

$$A=\frac{1}{8};\quad B=-\frac{5}{8};\quad C=-\frac{3}{4};\quad M=\frac{1}{2};\quad N=\frac{3}{2}$$

Sustituyendo en la integral:

$$\int\left(\frac{1/8}{x+1}+\frac{-5/8}{x-1}-\frac{3/4}{(x-1)^2}+\frac{\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}{x^2+1}\right)dx=$$

$$\frac{1}{8}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{5}{8}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{3}{4}\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\frac{1}{2}\int\frac{x}{x^2+1}dx+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}$$

www.elsolucionario.org

Resolviendo detenidamente cada integral

a) $\frac{1}{8}\int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{8}\int \frac{du}{u} = \ln|u| = \boxed{\frac{1}{8}\ln|x+1|+C}$

b) $-\frac{5}{8}\int \frac{dx}{x-1} = -\frac{5}{8}\ln(x-1)+C$

$-\frac{3}{4}\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \frac{-3}{4}\int \frac{dz}{z^2} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{3}{4(x-1)}+C$

c) $z = x-1$

$dz = dx$

$\frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\int \frac{dv}{v}\right] = \frac{1}{4}\ln|v|$

d) $= \boxed{\frac{1}{4}\ln|x^2+1|+C}$

$v = x^2+1$

$dv = 2xdx$

e) $\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} = \boxed{\frac{3}{2}\arctan x}$

Solución:

$$\int \frac{x^2-3x+2}{x^5-x^4-x+1}dx = \frac{1}{8}\ln|x+1| - \frac{5}{8}\ln(x-1) + \frac{3}{4(x-1)} + \frac{1}{4}\ln|x^2+1| + \frac{3}{2}\arctan x + C$$

www.elsolucionario.org

Cálculo Integral

Práctica: 6

Apellidos:..... Matrículas:.....

Grupo: .....Fecha: .....Profesor(a): .....

Integrales con ángulos repetidos, fracciones parciales y complexión de cuadrados.

I. Integrales con angulos repetidos

1) $\int sen7x\ sen3x dx$

2) $\int \cos 9x\ \cos 12x dx$

3) $\int \cos 25x\ \cos 12x dx$

II. Resuelva

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{100-x^2}}$

5) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-1}}$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x+1)^2}}$

7) $\int \frac{dx}{x^2+5}$

8) $\int \frac{dx}{\sqrt{-16+x^2}}$

9) $\int \frac{dy}{y^2-9}$

10) $\int \frac{dx}{25x^2-9}$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2+9}}$

III. Integrales por fracciones parciales.

12) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+x}$

13) $\int \frac{x-11}{x^2+3x-4}dx$

14) $\int \frac{3x-13}{x^2+3x-10}$

15) $\int \frac{17x-3}{3x^2+x-2}dx$

16) $\int \frac{7x^2+2x-3dx}{(2x-1)(3x+2)(x-3)}$

17) $\int \frac{dx}{(x^2-9)}$

18) $\int \frac{x^2}{(x+2)^3}dx$

19) $\int \frac{x}{(x-1)^3}dx$

IV. Resolver las siguientes integrales por complexion de cuadrados.

20) $\int \frac{dx}{x^2+8x+19}$

21) $\int \frac{dx}{5x^2+15x+20}$

22) $\int \frac{2x-1}{x^2+2x+2}dx$

23) $\int \frac{2x}{x^2+6x+13}dx$

"No hay amistad sin libertad" (Francesc Torralba)

www.elsolucionario.org

Integración de funciones racionales de seno y coseno

Hay integrales que a veces se nos complica resolverla por los métodos anteriormente vistos, por lo que si el integrando es una función racional de de $Sen(u)$ ^ $Cos(u$ debemos reducirla a una función racional de z, Por lo que asumiendo que $z = Tan\frac{1}{2}u$, para obtener las formulas del seno, coseno y el diferencial en función de z partiremos de las identidades del ángulo duplo.

1. Demostración de Sen u.

$Sen\,2u = 2\text{sen}(u).Cos(u)$; Como u= $\frac{1}{2}u$ tenemos que $Sen\,(u) = 2\text{sen}\frac{1}{2}u.Cos\frac{1}{2}u$

Ahora multiplicamos por $\frac{Cos\frac{1}{2}u}{Cos\frac{1}{2}u}$ y obtenemos que

$$Sen\,(u) = 2\text{sen}\frac{1}{2}u.Cos\frac{1}{2}u\left[\frac{Cos\frac{1}{2}u}{Cos\frac{1}{2}u}\right] \rightarrow Sen\,(u) = \left[\frac{2Sen\frac{1}{2}u}{Cos\frac{1}{2}u}\right] * \left[Cos^2\frac{1}{2}u\right]$$

$$= 2Tan\frac{1}{2}u.\left[\frac{1}{Sec^2\frac{1}{2}u}\right] \rightarrow = 2Tan\frac{1}{2}u.\left[\frac{1}{1+Tan^2\frac{1}{2}u}\right] = \frac{2Tan\frac{1}{2}u}{1+Tan^2\frac{1}{2}u}$$; ahora haciendo sustituciones de $z = Tan\frac{1}{2}u$ tenemos que $Sen(u) = \frac{2z}{1+z^2}$

www.elsolucionario.org

2. Demostración de Cos U.

Como $Cos(u)=2Cos^2\frac{1}{2}u-1$ aplicando identidades trigonométricas para el coseno obtendremos que $Cos(u)=\frac{2}{Sec^2\frac{1}{2}u}-1\rightarrow Cos(u)=\frac{2}{Tan^2\frac{1}{2}u+1}-1$ y operando algebraicamente

$$=\frac{2}{Tan^2\frac{1}{2}u+1}-\frac{Tan^2\frac{1}{2}u+1}{Tan^2\frac{1}{2}u+1}=\frac{1-Tan^2\frac{1}{2}u}{1+Tan^2\frac{1}{2}u}\therefore Cos(u)=\frac{1-z^2}{1+z^2}$$

c) Demostración del diferencial

Como $z=Tan\frac{1}{2}u\rightarrow dz=\frac{1}{2}Sec^2\frac{1}{2}u.du$ por lo que aplicando identidades y luego haciendo transposición de términos tendremos que $dz=\frac{\left(1+Tan^2u\right)du}{2}\rightarrow 2dz=(1+z^2)du\therefore du=\frac{2dz}{1+z^2}$.

En conclusión: $Sen(u)=\frac{2z}{1+z^2}$; $Cos(u)=\frac{1-z^2}{1+z^2}$; $du=\frac{2dz}{1+z^2}$

Ejemplo 1. Calcule la siguiente integral $\int\frac{4\,du}{1+Cos\,u}$

$$\int\frac{4\,du}{1+Cos\,u}=\int\frac{4\left[\frac{2dz}{z^2+1}\right]}{1+\left[\frac{1-z^2}{z^2+1}\right]}=\int\frac{\frac{8dz}{z^2+1}}{\frac{2}{z^2+1}}=4\int dz=4z$$ Como ya sabemos que $z=Tan\frac{1}{2}u$ tenemos que $\int\frac{4\,du}{1+Cos\,u}=4Tan\frac{1}{2}u+C$

www.elsolucionario.org

Cálculo Integral

Práctica: 7

Apellidos:…… Matrículas:……..

Grupo: ……Fecha: ……..……Profesor(a): ……..……

Integrales de seno y coseno

1) $\int \frac{dx}{1+senx+\cos x}$ $\ln\left[1+\tan\frac{x}{2}\right]+c$

2) $\int \frac{senx\cos x}{1-\cos x}dx$ $\cos x+\ln\left|1-\cos x\right|+c$

3) $\int \cos ecxdx$ $\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c$

4) $\int \frac{dx}{senx+\tan x}$ $-\frac{1}{4}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c$

5) $\int \frac{\cot x}{3+2senx}dx$ $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{senx}{3+2senx}\right|+c$

6) $\frac{dx}{2-\cos x}$ $\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\sqrt{3}\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ +c

7) $\frac{dx}{1+senx-\cos x}$ $\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}\right|$

"Un país con grandes desigualdades sociales mata de hambre a los de abajo, de miedo a los de arriba, y deja sin libertad y sin felicidad a todos" (Juan)

www.elsolucionario.org

Sumatoria y área de figuras planas

Para definir el área de una región en el plano cartesiano, acotada por una curva y=f(x) y las rectas $x = a$ y $x = b$, hay que hallar la suma de muchos términos; por lo que hay que utilizar la expresión de sumatoria.

Sumatoria:

Dado un conjunto de números $(b_i, b_{i+1}, b_{i+2}, ..., b_n)$, su suma la representamos como

$\sum_{k=1}^{n} b_k = b_i + b_{i+1} + b_{i+2} + ... + b_n,$, donde

$\sum$: denota sumatoria

b_k : representa el k-ésimo término

k : se llama índice de sumatoria y adquiere valores enteros sucesivos.

i : Extremo inferior, n : Extremos superior.

Ejemplos: Resuelve por sustitución directa.

$a) \sum_{k=1}^{4} k^2 = (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (4)^2 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30$

Sustituir k por 1,2,3,4 realizar las operaciones indicadas.

$b) \sum_{k=3}^{5} \frac{2}{k} = \frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \frac{2}{5} = \frac{47}{30}$

$c) \sum_{k=-2}^{2} \frac{k^2}{2k+1} = \frac{(-2)^2}{2(-2)+1} + \frac{(-1)^2}{(2)(-1)+1} + \frac{0}{2(0)+1} + \frac{1}{2(1)+1} + \frac{2}{2(2)+1} =$

$$\frac{4}{-3} + \frac{1}{-1} + 0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} - 1 = -\frac{8}{5}$$

www.elsolucionario.org

Sumatoria por propiedades

1) **Regla del valor constante:** Es igual a la constante multiplicada por el extremos superior.

1) $\sum_{k=1}^{n} c = cn, c:\text{constante}$

2) **Regla del múltiplo constante:** Es igual a la constante por la sumatoria de la secuencia.

2) $\sum_{k1=}^{n} c\cdot a_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k \ , c:\ \text{constante}$

3) **Regla de la suma**: Es igual a la suma de la sumatoria de cada secuencia.

3) $\sum_{k=1}^{n} \left[a_k + b_k\ \right] = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

4) Regla de la resta: Es igual a la resta de la sumatoria de cada secuencia.

4) $\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$

5) **Regla para cuando** $k \neq 1$ 5) $\sum_{k=a}^{b} f(k) = \sum_{k=a-c}^{b-c} f(k+c)$

7) Regla de la potenciación de sumatoria. Si $n \in z^{+}$, Entonces

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$$

www.elsolucionario.org

Ejemplos: Hallar la suma a través de sumatorias. (Asumir que k=i)

1) $\sum_{i=1}^{5}(i^2+3)$

$$= \sum_{i=1}^{5}(i^2+3) = \sum_{i=1}^{5} i^2 + \sum_{i=1}^{5}(3) \quad = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 5(3) \quad = \frac{5(6)(11)}{6} + 15 = 55+15 = 70$$

2) $\sum_{k=1}^{20}(3k)(k-2) \quad = \sum_{k=1}^{20}(3i^2-6i) = 3\sum_{k=1}^{20} i^2 - 6\sum_{k=1}^{20} i \quad = 3(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}) - 6(\frac{n(n+1)}{2})$

$$= \frac{1}{2}\left[n(n+1)(2n+1)\right] - 3\left[n(n+1)\right] \quad = \frac{1}{2}\left[20(20+1)(2(20)+1)\right] - 3\left[20(20+1)\right]$$

$$= 8,610 - 1260 = 7,350$$

3) Hacer la sumatoria de $\sum_{k=1}^{20} 3k(k^2+2)$ si obtenemos 133,560.

Estimación de áreas a través de sumas finitas.

Es a través de la cual podemos encontrar una proximidad del área de figuras geométricas que no tienen formulas especifica.

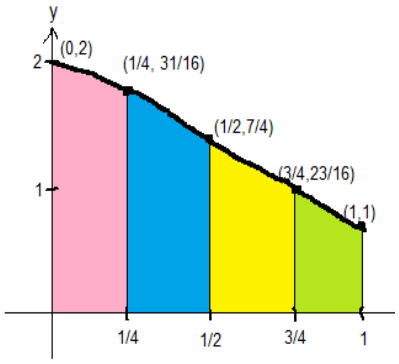
Sea y=f(x) una curva; acotada en el eje positivo por $x = a \hat{} x = b$. Continúa en $[a, b]$ el cual formara la región.

Para hallar el área debemos dividir la región en intervalos cuya longitud Serán rectángulos cuya A=b.h.

www.elsolucionario.org

Ejemplo : Encontrar el *á*rea de la curva $y = 2 - x^2$ entre las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$.

Buscando la altura para luego hacer la gráfica, por lo que se evalua la función y los resultados son: (0,2); $\left(\frac{1}{4}, \frac{31}{16}\right)$;$\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{4}\right)$;$\left(\frac{3}{4}, \frac{23}{16}\right)$. Aquí en cada rectángulo se incluye el extremo final.



Como se dividió el área en 4 rectángulos, tenemos que:b = $\frac{1}{4}$, h = y, aplicando sumatoria se tiene que

$$S \approx \frac{1}{4}(2) + \frac{1}{4}\left(\frac{31}{16}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{7}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{23}{16}\right)$$

$$S \approx \frac{1}{2} + \frac{31}{64} + \frac{7}{16} + \frac{23}{64}$$

$$S \approx \frac{71}{32} \approx 2.21875 \text{ unid}^2$$

Sumas de Riemann

Bernard Riemann fue un matemático Alemán que murió a la temprana edad de 40 años. (1826-1866). Su suma es un método matemático utilizado para aproximar el área total bajo la gráfica de una curva.

Aplicaciones

La determinación del área por este método es solo una de las muchas aplicaciones que implican el límite de una suma. Un enfoque similar puede utilizarse para determinar cantidades tan diversas como longitudes de arco, valores medios, centroides, volúmenes y áreas superficiales.

Sea $f : [D] \to R$, continua en [a, b] contenido en D, siendo P un conjunto de intervalos abiertos de particiones I, tales como $p =_a [(x_0, x_1); (x_1, x_2) + \ldots + (x_{n-1}, x_n)]_b$ por lo tanto P se define como la suma de Riemann.

$$S = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x$$ Donde: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ y $c_i = a + i\Delta x$

f (ci) es el valor mínimo absoluto de f en i-Enésima sub-intervalo. Esto significa

$$\forall \varepsilon \succ 0, \exists n \in N \succ 0 / \left| \sum_{i=1}^{n} f(ci)\Delta x - A \right| \prec \varepsilon$$

www.elsolucionario.org

Resolución de Área por sumatorias de Riemann.

1. Desarrollar operaciones si es necesario.
2. Despejar las constantes
3. Aplicar las propiedades de las sumatorias
4. Reducir términos semejantes
5. Aplicar limite cuando n tiende a infinito.

Ejemplo: Buscar el límite de $s_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$s_n = \left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{2}{n}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} i\right) = \left(\frac{2}{n}\right)(n+1)$$

$$s_n = \frac{\lim 2}{n \to \infty} + \frac{\lim}{n \to \infty}\frac{1}{n} = 2 + 0 = 2$$

Ejemplo 2: Dada la función $y = x^2$ limitada por las recta $x = 0 \wedge x = 3$

Hallar el área de la curva a través de sumatoria de Riemann.

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n} \quad \text{y} \quad c_i = a + i\Delta x = 0 + i\Delta x = i\Delta x$$

La definición dice que $A = \frac{Lim}{n \to \infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i).\Delta x$ por lo que

$$S = \sum_{i=1}^{n}(i\Delta x)^2.\Delta x = \sum_{i=1}^{n} i^2(\Delta x)^2.\Delta x = \sum_{i=1}^{n} i^2\left(\frac{3}{n}\right)^2.\left(\frac{3}{n}\right) = \frac{27}{n^3}\sum_{1}^{n} i^2$$

Operando con i=k cuadratico tenemos que por definicion da

$$S = \frac{27}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \quad S = \frac{27}{n^3}\left(\frac{2n^3+3n^2+n}{6}\right)$$

$$s = \frac{9}{n^3}\left[\frac{2n^3+3n^2+n}{2}\right] \quad S = \frac{27}{3} + \frac{27}{2n} + \frac{9}{2n^2}$$

Al tomar el límite cuando n tiende a infinito ($n \to \infty$), se hace para buscar que al incrementarse el número de rectángulos, el valor del área obtenido por la suma de Riemann se aproxime al valor real del área bajo la curva. Por tanto:

$$S = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{27}{3} + \frac{27}{2n} + \frac{9}{2n^2}\right) \quad \text{por lo tanto} \quad S = \frac{27}{3} = 9 \text{ Unid cuadráticas.}$$

Dada la funcion $y=3x^2$ limitada por las rectas $x=1 \wedge x=3$

www.elsolucionario.org

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$$

$$Ci = a + \Delta xi = 1 + \Delta xi$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(ci)\Delta x$$

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 3(1+\Delta xi)^2 \Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 3\left(1+\frac{2i}{n}\right)^2 \left(\frac{2}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n}\left(1+\frac{4}{n}i+\frac{4}{n^2}i^2\right)$$

ahora aplicamos propie+dades de la sumatoria asumiendo que n es constante.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}1+\frac{4}{n}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i^2\right]$$

aplicando ahora las potencias de i o k.

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n}\left[n+\frac{4}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)+\frac{4}{n^2}+\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n}\left[n+2(n+1)+\frac{2}{3n}\left[2n^2+3n+1\right]\right]$$

Multiplicando por $\left(\frac{6}{n}\right)$. y aplicando prop.limites

$$A = \lim_{n\to\infty} 6 + \lim_{n\to\infty} 12 + \lim_{n\to\infty} \frac{12}{n} + \lim_{n\to\infty} 8$$

$$+ \lim_{n\to\infty} \frac{12}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n^2} = 6+12+8$$

$$A = 26\ unid^2$$

www.elsolucionario.org

Cálculo Integral

Práctica: 8

Apellidos:…….…… Matrículas:……..

Grupo: ……Fecha: ……..……Profesor(a): …….…….……..

Tema I. Encuentre el valor de la sumatorias encontradas:

1) $\sum_{k=1}^{7} 2k+3$

2) $\sum_{k=3}^{6} \frac{k}{k-1}$

3) $\sum_{k=5}^{10} (2k-1)^2$

4) $\sum_{k=1}^{n=100} k^2$

5) $\sum_{k=-3}^{1} k$

6) $\sum_{k=3}^{3} (5k)$

7) $\sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)k+1}{k}$

8) $\sum_{k=0}^{2} (k^3-2)k$

Tema II. Calcular la suma usando las propiedades:

9) $\sum_{i=1}^{10} i^2 - 1 \ , sol: 375$

10) $\sum_{i=1}^{20} (i-1)^2 \ , sol: 10$

11) $\sum_{i=1}^{15} \frac{1}{n^2}(i-1)^2 \ , sol: 0.3$

12) $\sum_{i=1}^{n} i(2i-1) \ , sol: \frac{4n^3+3n^2-n}{6n}$

13) $\sum_{i=1}^{25} 2i(i-1) \ , sol: 10,400$

Tema III. Buscar una aproximacion de area en:

14) $y = x+2 \ , [1,5]$

15) $y = x^2 + x - 6 \ , [1,3]$

www.elsolucionario.org

Tema IV. Busca el limite de las siguientes sumatorias:

16) $s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \left(2 + \frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n}, sn = \frac{1}{3}$

17) $s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n^2 + 3i}{n^3}$

Tema V. Busca el area a traves de suma de Rieman, haga la ilustracion grafica:

18) Dado $y=x^2$ $en[0,8]$

19) Dado $y = 3x^2 en$ x=0 ^ x=1

20) Dado $y = 3x + 4 en$ x=2 ^ x=6

Tema VI. Busca el valor de las siguientes integrales definidas:

21) $\int_{-1}^{1} \left(3x^3 - x^2 + x - 1\right) dx$ $,sol: -\frac{8}{3}$

22) $\int_{2}^{3} \frac{x}{x^2 - 1} dx$ $,sol: \ln\sqrt{\frac{8}{3}}$

23) $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x}$ $,sol: 1$

24) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} senxdx$ $,sol: 1$

25) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} sen^3 x \cos^4 xdx$ $,sol: \frac{2}{35}$

Tema VII. Valor medio para integrales

26) Determina el valor medio de

$f(x) = 3x^2 - 2x$ en el intervalo $[1,4]$

27) Determina el valor de

$f(x) = \int_{0}^{\pi} \cos^2 x sen^2 xdx$

www.elsolucionario.org

Tema VIII. Buscar el valor de area de:

28) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$ $2u^2$

29) $\int_0^7 x\sqrt[3]{x+1}dx$ $\frac{1209}{28}u^2$

30) $\int_0^1 e^{-2x}dx$ $\frac{e^2-1}{2e^2}u^2$

31) $\int_0^{\pi/4} sen2\theta sen3\theta d\theta$ $\frac{3\sqrt{2}}{10}u^2$

32) $\int_{-\pi}^{\pi} sen^2 xdx$ π

No esperes que lleguen las circunstancias ideales ni la mejor ocasión para actuar, porque tal vez no lleguen nunca.

Autor pendiente

www.elsolucionario.org

Método de Simpson

Es una manera de obtener una estimación más exacta de una integral. Usa polinomios de orden superior para conectar los puntos. Por ejemplo, si hay un punto medio extra entre $f(a)$ y $f(b)$, entonces los tres puntos se pueden conectar con un polinomio de tercer orden. A las fórmulas resultantes de calcular la integral bajo estos polinomios se les llaman Reglas de Simpson.

Regla de Simpson 1/3.

Se utiliza cuando la integral es complicada y no se puede resolver por ningún método. La regla de Simpson de 1/3 proporciona una aproximación más precisa, ya que consiste en conectar grupos sucesivos de tres puntos sobre la curva mediante parábolas de segundo grado y sumar las áreas bajo las parábolas para obtener el área aproximada bajo la curva. Se resuelve mediante la fórmula:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right];\ \text{donde } h=\frac{b-a}{2},$$ es igual usar

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{b-a}{6}\right)\left[f(a)+4f(c)+f(b)\right],$$ c es el punto medio de $[a,b]$.

Ejemplo 1: Resolver $\int_1^2 \sqrt[3]{x^2+1}\,dx$ por medio del método de Simpson.

$$\int f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right];\ \text{donde } h=\frac{b-a}{2}$$

$$\int_1^2 \sqrt[3]{x^2+1}\,dx \approx \frac{b-a}{(2)3}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

$$\approx \frac{2-1}{6}\left[f(1)+4f\left(\frac{3}{2}\right)+f(2)\right]$$

$$*f(1) = \sqrt[3]{x^2+1} = \sqrt[3]{(1)^2+1} = \sqrt[3]{2} = 1.2599$$

$$*f(1.5) = \sqrt[3]{x^2+1} = \sqrt[3]{(1.5)^2+1} = \sqrt[3]{3.5} = 1.5183$$

$$*f(2) = \sqrt[3]{x^2+1} = \sqrt[3]{(2)^2+1} = \sqrt[3]{5} = 1.7100$$

$$\therefore$$

$$\int_1^2 \sqrt[3]{x^2+1}\,dx \approx 0.1667\left(1.2599+4(1.5183)+1.7100\right)$$

$$\int_1^2 \sqrt[3]{x^2+1}\,dx \approx 1.5075 \text{ unid}^2$$

Ejemplo 2: Resuelve $\int_0^1 e^{x^2}dx$

Organizando los datos a=0; c=0.5; b=1

$$\int_0^1 e^{x^2}dx \approx b-a\left[\frac{f(a)+4f(c)+f(b)}{6}\right]$$

$$\approx (1-0)\left[\frac{f(0)+4f(0.5)+f(1)}{6}\right]$$

$$\approx \frac{1+4e^{0.5}+e}{6} = 1.4757 \text{ unid}^2$$

www.elsolucionario.org

Regla del trapecio

La Regla o Método de los Trapecio es una técnica de aproximación que se utiliza para encontrar áreas bajo curvas. Una de las formas para aproximar una integral definida es utilizar *n* números de trapecios. Las integrales definidas son límites de las Sumas de Riemann, cualquiera de estas sumas se pueden utilizar como una aproximación tomando como referencia la fórmula de este método que supone que *f(x)* es continua y positiva en el intervalo *[a, b]* en *n* sub-intervalos de iguales longitud.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left[f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_3)+ \ldots + f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

Donde: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, el error se puede estimar al utilizar la regla del trapecio:

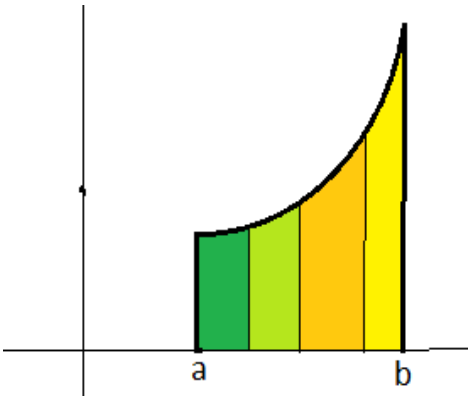
$Si\ M \in R^+\ y\ |\ f''(x)| \leq M,\ \forall x \in [a,b] \rightarrow$ el error que se comete al usar la regla del trapecio no es mayor que: $\frac{f''(x)(b-a)^3}{12n^2}$

Ejemplos: Hallar el área bajo la curva de la $f(x)=x^2$ en el intervalo $x=1$, $x=2$.

Con $n=4$ se tiene que:

$$\Delta x = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4} = 0.25$$

Luego, se sustituye en la ecuación para buscar el área y se tiene:



$$\int_1^2 x^2 dx \approx \frac{0.25}{2}\left[f(1)+2f(1.25)+2f(1.5)+2f(1.75)+f(2)\right]$$

A continuación, se evalúa la función con los valores dados y se tiene:

$$\approx \frac{0.25}{2}(1+3.125+4.5+6.125+4) \approx \frac{0.25}{2}(18.75) \approx 2.34575 unid.^2$$

www.elsolucionario.org

Y ese será el valor del área bajo la curva en los intervalos dados.

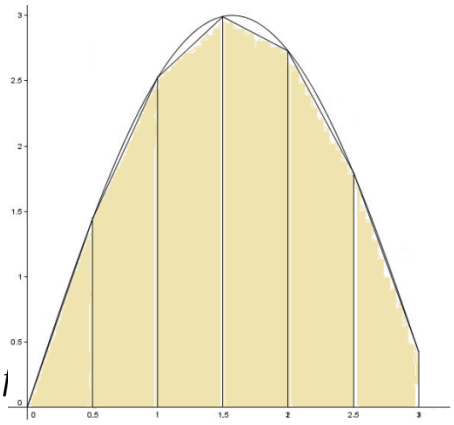
Calculando el error: $\frac{f''(x)(b-a)^3}{12n^2} = \frac{2(2-1)^3}{12(4)^2} = 0.04166666667$

Así se ve que la inexactitud de la regla del trapecio. Sin embargo, para funciones lineales esta regla es exacta.

También podemos comparar el resultado mediante el teorema fundamental del cálculo:

$$\int_1^2 x^2\ dx = \frac{x^3}{3}|_1^2 \approx \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \approx \frac{7}{2} \approx 2.33333\ unid.^2$$

Ejemplo 2: $f(x) = 3sen\,x;\ x = 0; x = 3;\ n = 6$



$$\Delta x = \frac{3-0}{6} = \frac{1}{2}$$

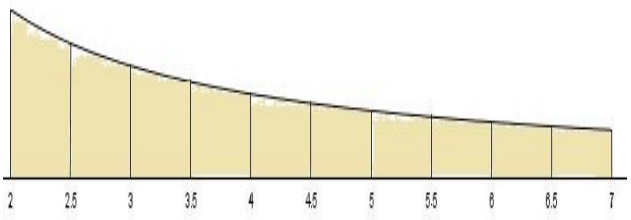
$$\int_3^0 3senx\,dx \approx \frac{1}{4}\left[f(0) + 2f(\frac{1}{2}) + 2f(1) + 2f(\frac{3}{2}) + 2f(2) + 2f(\frac{5}{2}) + f\right.$$

$$\approx \frac{1}{4}\left[3sen(0) + 2(3sen(0.5)) + 2(3sen(1)) + 2(3sen(1.5)) + 2(3sen(2)) + 2(3sen(2.5)) + 3sen(3)\right]$$

$$\approx 5.84\,unid.^2$$

www.elsolucionario.org

Ejemplo 3: $f(x)=\frac{1}{x};\ x=2,\ x=7,\ n=8$



$$\Delta x=\frac{7-2}{8}=0.625$$

$$\int_2^7 \frac{1}{x}dx \approx \frac{0.625}{2}\left[\begin{array}{l} f(2)+2f(2.625)+2f(3.25)+2f(3.875)+2f(4.5) \\ +2f(5.125)+2f(5.75)+2f(6.375)+f(7)) \end{array}\right]$$

$$\approx \frac{0.625}{2}\left[\frac{1}{2}+2(\frac{1}{2.625})+2(\frac{1}{3.25})+2(\frac{1}{3.25})+2(\frac{1}{3.875})+2(\frac{1}{4.5})+2(\frac{1}{5.125})+2(\frac{1}{5.75})+2(\frac{1}{6.375})+f(\frac{1}{7})\right]$$

$$\approx \frac{0.625}{2}(4.0325)\approx 1.26\ unid.^2$$

"Aunque esperes encontrar la felicidad en la meta, no te olvides nunca de divertirte durante el camino" (Juan)

www.elsolucionario.org

La integral definida

La integral definida es un concepto utilizado para determinar el valor de las áreas limitadas por curvas y rectas. La integral definida de la función entre los extremos del intervalo [a, b] se denota como $\int_a^b f(x)dx$ siendo a y b rectas de x.

Primer Teorema fundamental del cálculo

En relación con la controversia de quien fue el inventor del cálculo de Isaac Newton y Gottfried Leibniz en el siglo XVIII, surgió a partir de esa época una forma de demostrar el cálculo de diferentes maneras, una es el cálculo diferencial o método de las fluxiones por Newton, la otra se le llamo Integrales.

El teorema fundamental del cálculo era investigado tiempos atrás de tal forma que Newton le dio seguimiento dando lugar así a la derivación, esta última era la manera de estudiar las áreas y los volúmenes a diferencia de la integración que estudia algo más de lo que se había investigado a través de las derivadas de figuras cuadráticas, el área debajo de figuras curvas.

La importancia del primer teorema fundamental del cálculo radica en la relación existente entre el cálculo integral y el cálculo diferencial, es decir el mismo consiste en demostrar que la integración y la derivación son operaciones inversas

Este esblece que : $Dada\ una\ función\ f\ \text{int}egrable\ en\ [a,b],$

$definimos\ F\ sobre [a,b]\ por\ F(x)=\int_a^x f(t)dt$

$Si\ f\ es\ continua\ en\ c\in(a,b),\ entonces\ F\ es$

$derivable\ en\ c\ y\ F'(c)=f(c)$

www.elsolucionario.org

Segundo Teorema Fundamental del Cálculo

Este teorema es una propiedad de las funciones continuas que permite calcular fácilmente el valor de la integral definida a partir de cualquiera de las primitivas de la función.

Si f es continua en $[a,b]$ y F es una integral de f en $[a,b]$

$\rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Demostración:

1) Sea g(x)=$\int_a^x f(t)\,dt$

2) Por el primer Teorema fundamental el cálculo.

$F'(x) = f(x) = g'(x) \rightarrow \forall x \in \square, \exists c \in \square \ / \ F(x) = g(x) + c$

3) Evaluar a $(x) = g(x) + c$ en $[a,b]$; tomando en cuenta valor final menos el valor inicial.

$F(b) = g(b) + c$ y $F(a) = g(a) + c,$ por lo que se tiene que :

$F(b) - F(a) = [g(b) + c] - [g(a) + c]$

Ahora aplicando el paso 1, g(x)=$\int_a^x f(t)\,dt$ en el punto c a evaluar,

tal como evaluar a g(b)=$\int_a^b f(t)\,dt$ y g(a)=$\int_a^a f(t)\,dt \rightarrow$

$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt, Como$ se *sabe* que $\int_a^a f(t)\,dt = 0$

$\rightarrow F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx$

www.elsolucionario.org

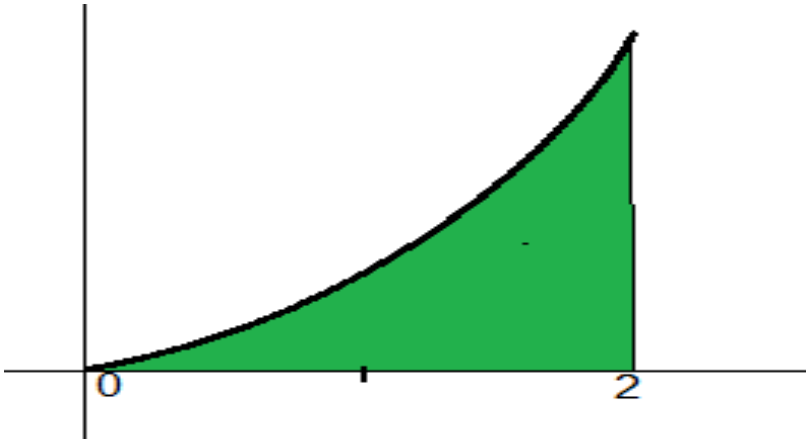
Ejemplo 1 : Calcular $\int_0^1 x^2\,dx$

la funcion que la satisface es $F(x)=\frac{x^3}{3}$

Aplicando el teorema $\int_0^1 x^2\,dx = F(1)-F(0)=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{1}{3}unid^2$

Ejemplo 2 : Calcular el área bajo la curva $\int_0^2 x^2 dx$.

$F(x)=\frac{x^3}{3}$ Aplicando el teorema $=\frac{8}{3}-\frac{0}{3}=\frac{8}{3}unid^2$



Henri Lebesgue

La figura del matemático francés **Henri Lebesgue** (1875-1941) resultó fundamental para la sistematización del cálculo integral y su aplicación a las modernas teorías de las ciencias naturales y económicas.

www.elsolucionario.org

Propiedades de las integrales definidas

Para facilitar el cálculo de una integral definida sin tener que recurrir al método de sumatorias de Riemanns en donde se estableció que

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i x,$$

Se proporcionan las siguientes propiedades fundamentales.

1) Si a > b, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

2) Si f(a) existe, entonces

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

3) Si k es una constante cualquiera, entonces

$$\int_a^b kdx = k(b-a)$$

4) Si la función f es integrable en [a, b] y, k es una constante arbitraria, entonces

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

5) Si las funciones f y g son integrables en [a, b], entonces f $\pm$ g también es integrable en [a, b] y

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

6) Si f es integrable en [a, b], [a, c] y [c, b], y a< c < b, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

7) Si f es integrable en un intervalo cerrado 1 y, (a, b, c) $\in$ 1, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

www.elsolucionario.org

8) Si f es integrable en [a, b] y f (x) ≥ 0 $\forall$ x $\in$ [a, b], entonces

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

9) Si las funciones f y g son integrables en [a, b] y f (x) $\geq$ g (x) $\forall$ x $\in$ [a, b], entonces

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

Ejemplos: Evalúa las siguientes integrales.

1. $$\int_{-2}^{3} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\int_{-2}^{3} = \frac{(3)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{3} = \frac{27}{3} - \frac{4}{3} = \frac{23}{3}$$

2.
$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -[\cos\pi - \cos 0]$$
$$= -[-1-1] = 2$$

3.
$$\int_5^2 (x^2 + x - 1)dx =$$

Aplicando propiedad 1. si $a>b$ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

$$-\int_2^5 (x^2 + x - 1)dx = -\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x\int_2^5\right] =$$
$$-\left[\frac{125}{3} + \frac{25}{2} - 5 - \frac{8}{3} - 2 + 2\right]$$
$$-\left[\frac{117}{3} + \frac{25}{2} - 5\right] = -\frac{93}{2}$$

4.
$$\int_{\pi}^{2\pi} (sen\theta + 5\cos\theta - 2)d\theta$$
$$= -\cos\theta + 5sen\theta - 2\theta\Big|_{\pi}^{2\pi}$$
$$= [-\cos 2\pi + 5sen2\pi - 2(\pi)] - [-\cos\pi + 5sen\pi - 2\pi]$$
$$= [-1 + 5(0) - 2\pi] - [-(-1) + 5(0) - 2\pi]$$
$$= -1 - 2\pi - 1 + 2\pi = -2$$

www.elsolucionario.org

Valor promedio de una función

Si f es integrable en el intervalo cerrado [a, b], entonces el valor promedio de f en el intervalo es $\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$

Ejemplo: Determine el valor promedio de $f(x)=x^3;\ [0,2]$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=\frac{1}{2-0}\Big|_0^2 x^3dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]\Big|_0^2$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{16}{4}\right]=\frac{16}{8}=2 \text{ es el valor promedio de } f(x)$$

Teorema del valor medio para cálculo integral.

El teorema del valor medio para integrales establece que en alguna parte entre los rectángulos inscritos y circunscritos hay un rectángulo cuya área es precisamente igual al área de la región bajo la curva.

Enunciado:

Si f es continua en el intervalo cerrado [a, b], entonces existe un número c en el intervalo cerrado [a, b] tal que $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ es lo mismo decir $f(c)(b-a)=\int_a^b f(x)dx$

Ejemplo: Encuentre el área de la función $fx=x^2-3 \quad en \quad [1,3]$

Como la función es continua en $[1,3]$ se puede aplicar el teorema de la media.

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\rightarrow\frac{1}{3-1}\int_1^3 x^2-3\rightarrow\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-3x\right)_1^3$$

$$\frac{1}{2}\left((\frac{27}{3}-9)-(\frac{1}{3}-3)\right)=\frac{1}{2}(0+\frac{8}{3})=\frac{8}{6} \quad \therefore \quad f(c)=\frac{4}{3}$$

Buscando ahora el valor de c tenemos que:

$$c^2-3=\frac{4}{3}\rightarrow c^2=\frac{13}{3}\therefore c=\sqrt{\frac{13}{3}}$$

www.elsolucionario.org

Integrales con Valor Absoluto

Estas son muy útil para cualquier proceso de identificar áreas bajo curvas, no importando si esta tiene partes bajo o sobre el eje x.

Formalmente, el valor absoluto o módulo de todo número real está definido por: $|a| = \begin{cases} a, \text{ si } a \geq 0 \\ -a, \text{ si } a < 0 \end{cases}$

El valor absoluto de A siempre será mayor o igual que cero y nunca negativo

Propiedades del valor absoluto.

1) Valor absoluto de la suma algebraica de varios números
   $|x+y|=|x|+|y|$

2) Valor absoluto de la diferencia de numero reales
   $|x-y|-|x+y|$

3) El valor absoluto de un producto
   $|xyz|=|x||y||z|$

4) El valor absoluto de un cociente
   $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Ejemplo 1: Resolver la siguiente integral con valor absoluto.

$$f(x) = \int_0^4 \left|x^2 - 4x + 3\right| dx$$

www.elsolucionario.org

a) Si integramos esta función sin valor absoluto daría lo siguiente.

$$F(x)=\int_0^4\left(x^2-4x+3\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Big|_0^4\rightarrow$$

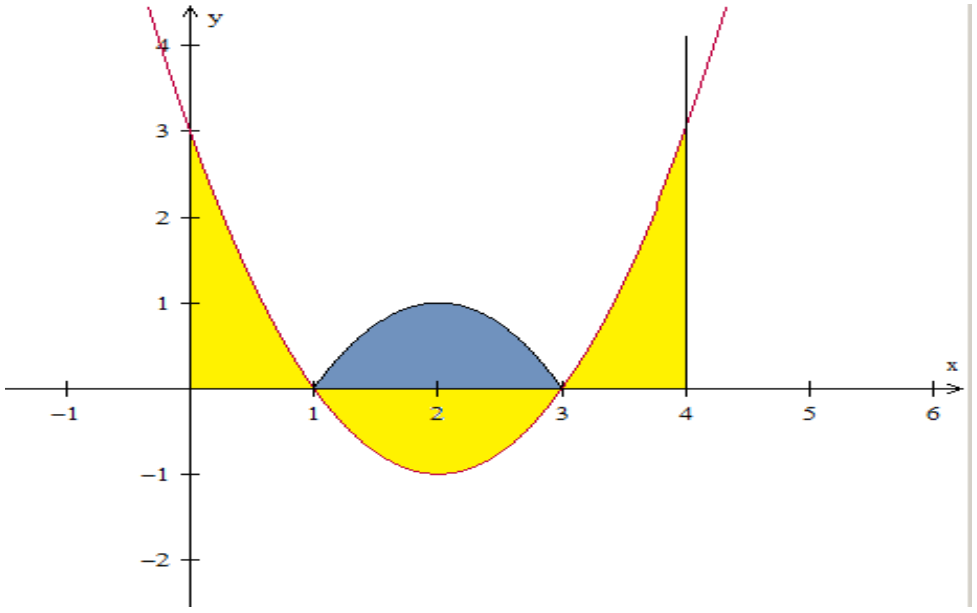
$$=\left(\frac{(4)^3}{3}-2(4)^2+3(4)\right)-\left(\frac{(0)^3}{3}-2(0)^2+3(0)\right)=\left(\frac{64}{3}-32+12\right)\quad .$$

$$F(x)=\frac{4}{3}Und^2$$

A nivel gráfico la solución de la función sin valor absoluto son la suma de las partes que estan en amarillo.

b) Resolución con valor absoluto.

Las integrales definidas con valor absoluto debemos separarla a partir de los puntos donde el módulo se hace cero. Se debe encontrar la sumatoria de las áreas que proyecta esa función en los puntos donde está evaluada, para ellas se encuentra el área bajo la curvas de la suma de las regiones ya sean negativas o positivas.



www.elsolucionario.org

El asunto radica que al integrar una función con valor absoluto vemos que el área que antes se restaba ahora se suma, pues, la parte que tenemos de azul es la que tendremos sumando.

La integral dada es $f(x)=\int_0^4 \left|x^2-4x+3\right| dx$

Para resolver esta integral empezamos por la definición de valor absoluto $\left|x^2-4x+3\right|=\begin{cases}-\left(x^2-4x+3\right), x<0\\ \left(x^2-4x+3\right), x\geq 0\end{cases}$ y luego se busca los valores que anulan la ecuación $x^2-4x+3=(x-1)(x-3)\rightarrow x_1=1\wedge x_2=3$

El ejercicio pide que se evalúe la integral en el intervalo $[0,4]$ pero ya se conocen los valores que anulan la función, por lo que hay que hacer diferentes intervalos hasta donde esta se anules, es decir se rompe $[0,4]\rightarrow[0,1];[1,3];[3,4]$ la integral en 3 partes debido a los intervalos que se forman entre esos valores conforme a la definición del valor absoluto.

$$\int_0^1\left(x^2-4x+3\right)dx+\int_1^3-\left(x^2-4x+3\right)dx+\int_3^4\left(x^2-4x+3\right)dx$$

Como se observa la parte en el intervalo de $[1,3]$ esta en forma negativa, es por la definición de valor absoluto como esta queda por debajo de la gráfica obligatoria mente se cambia el signo.

www.elsolucionario.org

Re *solviendo* a $\int_0^1\left(x^2-4x+3\right)dx+\int_1^3\left(-x^2+4x-3\right)dx+\int_3^4\left(x^2-4x+3\right)dx$

$$\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\Big|_0^1=\left(\frac{(1)^3}{3}-2(1)^2+3(1)\right)-\left(\frac{(0)^3}{3}-2(0)^2+3(0)\right)=\frac{1}{3}-2+3\Rightarrow\frac{4}{3}und^2$$

$$-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\Big|_1^3=\left(-\frac{(3)^3}{3}+2(3)^2-3(3)\right)-\left(-\frac{(1)^3}{3}+2(1)^2-3(1)\right)=(-9+18-9)+\left(\frac{4}{3}\right)\Rightarrow\frac{4}{3}und^2$$

$$+\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\Big|_3^4=\left(\frac{(4)^3}{3}-2(4)^2+3(4)\right)-\left(\frac{(3)^3}{3}-2(3)^2+3(3)\right)=\left(\frac{64}{3}-32+12\right)-(9-18+9)=\frac{4}{3}und^2$$

$$f(x)=\int_0^4\left|x^2-4x+3\right|dx=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{12}{3}\Rightarrow\ 4\ \text{unid}^2$$

Ejemplo 2: Resolveer $\int_{-2}^{3}|x|dx=\int_{-2}^{0}-xdx+\int_0^3 xdx=-\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{0}+\quad\frac{x^2}{2}\Big|_0^3$

$$=\left(\frac{-0^2}{2}-\frac{(-2)^2}{2}\right)+\left(\frac{3^2}{2}-\frac{0}{2}\right)=0+2+\frac{9}{2}=\frac{13}{2}und^2$$

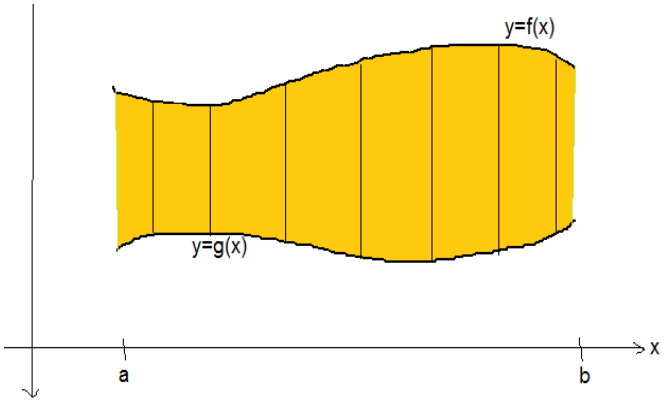
www.elsolucionario.org

Áreas entre curvas

Si f (x) y g (x) son funciones continuas en [a,b]tal que $f(x) \le g(x)$, si y=g(x) está por debajo de y=f(x) en el intervalo dad. Su área se calcula mediante la fórmula

$$\int_a^b (f(x)-g(x))dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i)-g(x_i)(\Delta x_i)$$

Vemos que (f(x)-g(x) representa la altura de un rectángulo diferencial.



Ejemplo 1: Hallar el área de la región encerrada por las curvas.

$f(x) = x^2 - x - 2 \;\wedge\; g(x) = 4 - x^2$

1) Buscando la intersección de las graficas $f(x) = g(x)$

$x^2 - x - 2 = 4 - x^2 \rightarrow 2x^2 - x - 6 = 0$, donde a = 2, b = –1, c=-6

$$x = 1 \pm \frac{\sqrt{1-4(2)(-6)}}{2(2)} \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{4} \Rightarrow x = \frac{1 \pm 7}{4} \therefore \text{ Las intersecciones son } x_1 = 2 \;\wedge\; x_2 = -\frac{3}{2}$$

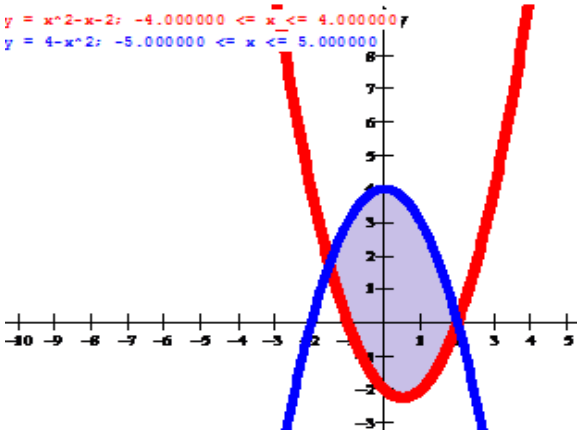
$$S = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx$$

$$= \int_{-\frac{3}{2}}^{2} \big[(4-x^2)-(x^2-x-2)\big]dx$$

$$= \int_{-\frac{3}{2}}^{2} (4 - x^2 - x^2 + x + 2)dx$$

$$= \int_{-\frac{3}{2}}^{2} (6 + x - 2x^2)dx$$

$$= \left(6x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_{-\frac{3}{2}}^{2}$$



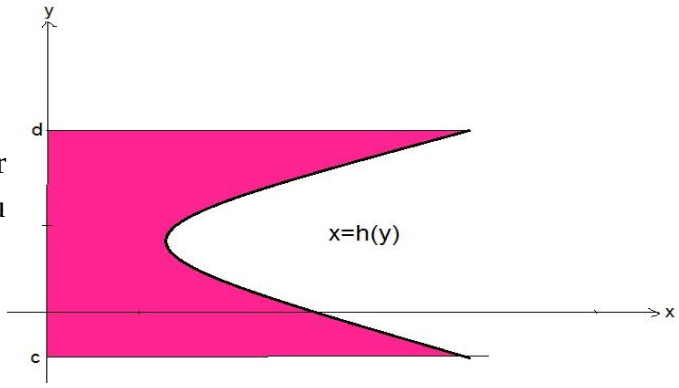
Ahora Evaluando

$$\left[6(2) + \frac{1}{2}(2)^2 - \frac{2}{3}(2)^3\right] - \left[6\left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}\right)^3\right] = \frac{243}{24} = 14.29\ u^2$$

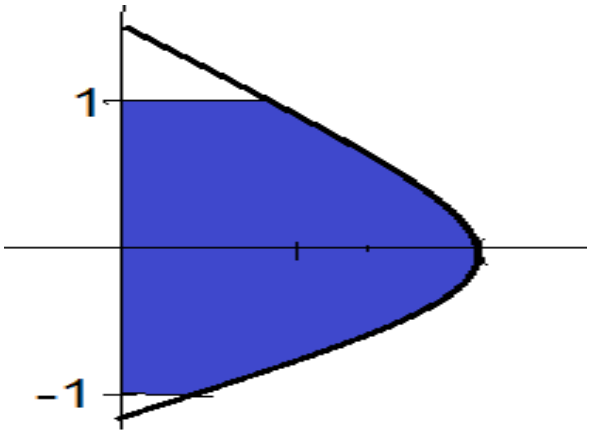
www.elsolucionario.org

Área entre una curva y el eje Y

Este tipo de curva está limitado a la izquierda por el ejes de las Y y queda entre d $y=c \wedge y=d$, su curva será X= h(y) por lo tanto $\int_c^d h(y)dy$.



Ejemplo: Si una parábola $x=2-y^2$ está limitado por las rectas $y=1 \wedge y=-1$. Calcular el área de la figura.



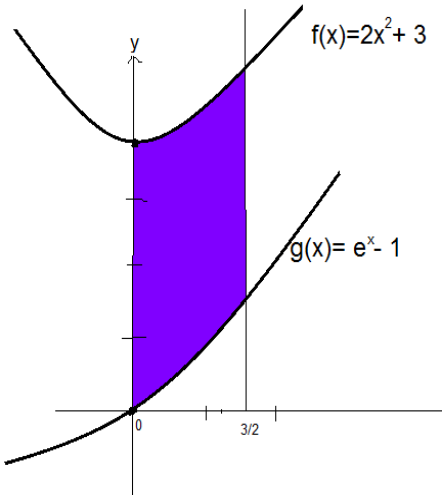
$$\int_c^d h(y)dy = \int_{-1}^{1}(2-y^2)dy$$

$$= 2y - \frac{y^3}{3}\int_{-1}^{1} = \left[2(1) - \frac{1}{3}\right]$$

$$-\left[2(-1) - (-\frac{1}{3}\right] = \frac{5}{3} - (-\frac{5}{3}) = \frac{10}{3}$$

$$A = \frac{10}{3} unid^2$$

Ejemplo: Encuentra el área entre las curvas



$$f(x) = 2x^2+3 \quad \wedge \quad g(x) = e^x \quad en \left[0, \frac{3}{2}\right]$$

$$S = \int_a^b (f(x) - gx)dx =$$

$$= \int_0^{\frac{3}{2}} \left[\left(2x^2+3\right) - \left(e^x - 1\right)\right]dx$$

$$= \int_0^{3/2} \left(2x^2 - e^x + 4\right)dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^3 + 4x - e^x\right]\Big|_0^{\frac{3}{2}}$$

$$= \left[\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3 + 4\left(\frac{3}{2}\right) - e^{3/2}\right] - \left[\frac{2}{3}(0)^3 + 4(0) - e^0\right]$$

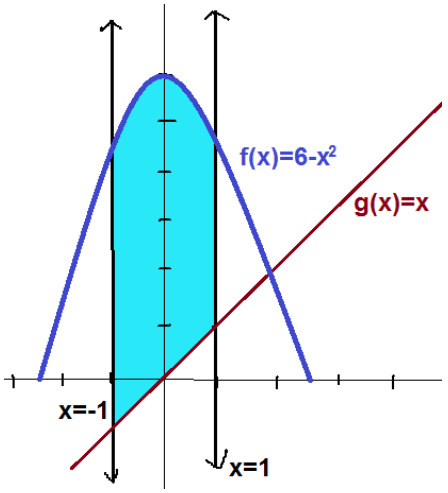
$$= (3.7683 - 1) = 2.77 unid^2$$

www.elsolucionario.org

Área de una región de una curva bajo o sobre una recta.

Se aplica el mismo procedimiento vista anteriormente.

Ejemplo: Buscar el area de la curva $f(x)=6-x^2 \ \wedge \ g(x)=x$ entre las rectas x=-1^x=1.



$$\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_{-1}^{1}\left[\left(6-x^{2}\right)-(x)\right]dx$$

$$\int_{-1}^{1}\left(6-x-x^{2}\right)dx = 6x-\frac{1}{2}x^{2}-\frac{1}{3}x^{3}\Big|_{-1}^{1}$$

$$\left[6(1)-\frac{1}{2}(1)^{2}-\frac{1}{3}(1)^{3}\right]-\left[6(-1)-\frac{1}{2}(-1)^{2}-\frac{1}{3}(-1)^{3}\right]$$

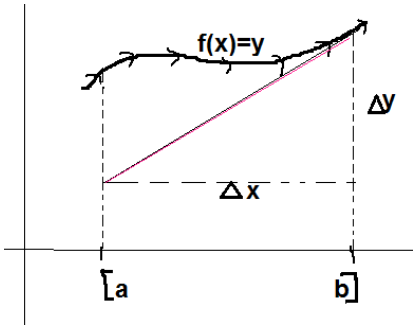
$$=\left[6-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right]-\left[-6-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right]$$

$$=\frac{31}{6}-\left(-\frac{37}{6}\right)=\frac{34}{3}= \quad 11.33 unid^{2}$$

Longitud del arco de una curva

Es la distancia o camino recorrido por un punto a lo largo de una curva en un intervalo dado.

Teorema: Si f(x) ^f´(x) son continuas en [a,b] la longitud de arco de la curva y=f(x) desde(a,f(a) al punto (b,f(b)) viene dada por $L=\int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}dx$



$s = longitud$ de Arco

$(\Delta s)^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2 dividiendo$ por $(\Delta x)^2$

$$\frac{\Delta s^2}{(\Delta x)^2}=\frac{(\Delta x)^2}{(\Delta x)^2}+\frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}\rightarrow\sqrt{\frac{\Delta s^2}{(\Delta x)^2}}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta x}=\sqrt{1+(y')^2}\rightarrow\int d(s)=\int\sqrt{1+(y')^2}dx$$

$$s=\int\sqrt{1+(y')^2}dx$$

www.elsolucionario.org

Ejemplo 1: Calcular la longitud de arco de $f(x)=-x^2-x+6$ ***en el intervalo [-1,1]. Hacer el bosquejo de la gráfica.***

$$L=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}dx$$

$$Y=-x^2-x+6\Rightarrow y'=-2x-1$$

$$L=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+(-1)^2(2x+1)^2}dx$$

$$L=\int_{-1}^{1}\sqrt{(2x+1)^2+1}dx$$

Re *solviendo* por formula tenemos

$$\int\sqrt{u^2\pm a^2}du=\frac{u}{2}\sqrt{u^2+a^2}\pm\frac{a^2}{2}Ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right|+c$$

$$L=\left[\frac{2x+1}{2}\sqrt{(2x+1)^2+1}+\frac{1}{2}L\,n1(2x+1)+\sqrt{(2x+1)^2+1}\right]\int_{-1}^{1}$$

$$=\frac{3}{2}\sqrt{10}+\frac{1}{2}L\,n\left|3+\sqrt{10}\right|-\left[-\frac{1}{2}\sqrt{2}+\frac{1}{2}L\,n\left|-1+\sqrt{2}\right|\right]$$

$$=4.7434+0.909+0.707+0.4407$$

$L=6.8001$ *unidades*

Ejemplo 2: Halle la longitud de la curva de la función.

$Y=\frac{1}{6}(x^2+4)^{3/2}$ *en* el intervalo $0\le x\le 3$

$$y=\frac{1}{6}(x^2+4)^{3/2}\ en\ [0,3]$$

$$y'=\frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\right)(x^2+4)^{1/2}-2x\quad=\frac{1}{4}(x^2+4)2x\rightarrow y'=\frac{1}{2}x(x^2+4)^{1/2}$$

$$L=\sqrt{1+(y')^2}dx\rightarrow\quad\int_0^3\sqrt{1+\left[\left(\frac{x}{2}\right)\sqrt{x^2+4}\right]^2}$$

$$L=\int_0^3\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}(x^2+4)dx=\int_0^3\sqrt{\left(\frac{4}{4}+\frac{x4}{4}+\frac{4x^2}{4}\right)}dx=\int_0^3\sqrt{\frac{x^4+4x^2+4}{4}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^3\sqrt{x^4+4x^2+4}\ dx\rightarrow L=\frac{1}{2}\int_0^3\sqrt{(x+2)^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^3(x^2+2)dx$$

$$L=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\Big|_0^3\right\}=\frac{1}{2}\left[(9+6)-(0)\right]=\frac{1}{2}(15)\Rightarrow\quad L=\frac{15}{2}unid.$$

www.elsolucionario.org

Ejemplo 3: Calcular la longitud de arco de $f(x)=\frac{2}{3}x^{3/2}+1\,,\ [0,1]$

$$L=\int_a^b\sqrt{1+(y')^2}\,dx \rightarrow y'=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$$

$$L=\int_0^1\sqrt{1+\left(\sqrt{x}\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx$$

$$=\int_0^1\sqrt{1+x}\;dx=\int_0^1(1+x)^{\frac{1}{2}}dx=\int u^{\frac{1}{2}}du=\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3}=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1$$

$$\therefore \text{evaluando}\ \frac{2}{3}(1+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}(1+0)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}\left[(2)^{\frac{3}{2}}-(1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$L=\frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)unid$$

www.elsolucionario.org

Cálculo Integral

Práctica: 9

Apellidos:..... Matrículas:.....

Grupo:.....Fecha.....Profesor(a):.....

I. Hallar el área entre las siguientes curvasy haga un bosquejo de la gráfica.

a) $f\left(x\right)=x^2-2x; g\left(x\right)=-x^2$

b) $f\left(x\right)=1-x^2; g=x;\left[0,1\right]$

c) $y=x^2-2; y=2$

d) $y=x^2-2x; y=x$

e) $y^2-4x=4; 4x-y=16$

f) $x=y^2; x=y+2$

g) $y=2senx; y=sen2x; 0\le x\le\pi$

h) Encuentre el area de la región conforma de helipce , acotada por la curva $x-y^3=0$ y la recta $x-y=0.$

II. Buscar la siguiente longitud de curvas. Via calculadora haga un bosquejo.

$y=\frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2+2\right)^3}$ de $x=0$ a $x=3$

$y=x^{3/2}$ de $x=0$ a $x=4$

"Un viaje de miles de kilómetros debe comenzar por un solo paso" (Lao-Tsé).

www.elsolucionario.org

Integrales impropias

Integrales Impropias:

La definición de integral definifa $\int_a^b f(x)dx$ requiere que el intervalo $[a,b]$sea finito y que además f (x) sea continua en dicho intervalo, pero si hay integrales que no cumplen estas condiciones ya sea porque uno o los dos limites de integración sean infinito o quizás porque dentro del intervalo hay descontinuidades, entonces las integrales se le llama impropia.

Propiedades de las integrales impropias con limites de integración infinitos.

1. si f es continua en $[a,\infty]\Rightarrow$

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

2. si f es continua en $[-\infty,b]\Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

3. si f (x) es continua en el intervalo $(-\infty,\infty)\Rightarrow$

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{\infty} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)dx$$

En los dos primeros casos si el limite existe la integral es convergente de lo contrario es divergente. En el caso 3 la integral impropia a la izquierda diverge si cualquiera de las integralesa la derecha divergen.

Ejemplos: Diga si las siguientes integrales son convergente o divergentes.

a) $\int_2^{\infty} x^2dx$

$$\int_2^{\infty} x^2dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^{\infty} x^2dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^b x^2dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^b$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left[x^3\right]_2^b = \frac{1}{3}\lim_{b\to\infty}\left(b^3-8\right) = \frac{1}{3}(\infty-8) = \infty$$

Esta integral es divergente.

www.elsolucionario.org

b) $\int_6^{\infty} e^{-\frac{x}{4}} dx$

$$\int_1^{\infty} e^{-\frac{x}{4}} dx = \lim_{b\to\infty} \int_6^b e^{-\frac{x}{4}} dx = \lim_{b\to\infty} \left[-4e^{-\frac{x}{4}} \right]_6^b = -4 \lim_{b\to\infty} \left(e^{-\frac{b}{4}} - e^{-\frac{3}{2}} \right)$$

$$= -4\left(e^{-\frac{\infty}{4}} - e^{-\frac{3}{2}} \right) = -4\left(e^{-\infty} - e^{-\frac{3}{2}} \right) = -4\left(o - e^{-\frac{3}{2}} \right) = \frac{4}{e^{\frac{3}{2}}} .$$

La integral es convergente.

Integrales impropias con discontinuidades infinitas.

Propiedades

1. si f es continua en $[a,b]$ y tiene una descontinuidad infinita en b $\Rightarrow$

$$\int_b^a f(x)dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx$$

2. si f es continua en (a,b) y tiene una descontinuidad infinita en a, $\Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)dx$$

3. si f es continua en $[a,b]$, excepto para algun c $\in$ (a,b) donde f tiene una descontinuidad infinita $\Rightarrow$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx$$

En el caso 1 y 2 la integral impropia converge si el limite existe, de otra forma es divergente, mientras que en el caso 3 la integral impropia en la izquierda diverge si cualquiera de la integrales impropiasa la derecha diverge.

c) Resolver $\int_0^1 x \ln x$.

Analizamos si f (x) es continua en $[0,1]$

$f(x) = x \ln x$

$f(1) = 1\ln 1 = 1(0) = 0$

$f(0) = 0 \ln 0 = 0(\infty) = 0.\infty$

www.elsolucionario.org

$f(x)$ es descontinua en el limite inferior. $\Rightarrow$

$$\int_0^1 x\ln x dx = \lim_{a\to 0}\int_a^1 x\ln x dx = \lim_{a\to 0}\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x}$$

$$\left.\begin{array}{c} u=\ln x \\ du=\dfrac{dx}{x} \\ \int dv=\int x dx \\ v=\dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\} \boxed{=\lim_{a\to 0}\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int x dx}$$

$$=\lim_{a\to 0}\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\Big]_a^1 = \lim_{a\to 0}\frac{(1)^2}{2}\ln 1 - \frac{(1)^2}{4} - \left(\frac{a^2}{2}\ln a - \frac{a^2}{4}\right)$$

$$=\lim_{a\to 0} -\frac{1}{4} - \frac{a^2}{2}\ln a + \frac{a^2}{4} = -\frac{1}{4} - 0\ln 0 \ +0 = -\frac{1}{4} - 0.\infty$$

Nos dio una indeterminada por lo que debemos destruirla por medio de L`Hòpital.

$$\lim_{a\to 0} -\frac{a^2}{2}\ln a = -\frac{1}{2}\lim_{a\to 0} a^2\ln a = -\frac{1}{2}\lim_{a\to 0}\frac{\ln a}{1/a^2} = -\frac{1}{2}\frac{\ln 0}{1/0^2} = -\frac{\infty}{\infty}$$

ahora si se puede aplicar la regla de l`Hòrbital.

$$-\frac{1}{2}\lim_{a\to 0} -\frac{\frac{1}{a}}{-\frac{2}{a^3}} = \frac{1}{2}\lim_{a\to 0}\frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}(0)^2 = 0 \to -\frac{1}{4} + 0 = -\frac{1}{4}$$

Sustituyendo tenemos: $\int_0^1 x\ln x dx = -\frac{1}{4}$

$$=\frac{1}{2}(0)^2 = 0$$

sustituyendo tenemos: $\int_0^1 x\ln x dx = -\frac{1}{4} + 0$

www.elsolucionario.org

Cálculo Integral

Práctica: 10

Apellidos:..... Matrículas:.....

Grupo:.....Fecha.....Profesor(a):.....

I. Diga si las siguientes integrales impropias es divergente o convergente.

1) $\int_0^{\infty} x^3 dx$

2) $\int_0^{\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} dx$

3) $\int_{-\infty}^{0} e^x dx$

3) $\int_4^{\infty} \left(x^2 + 2x - 3\right) dx$

4) $\int_0^{\infty} e^{-x} \cos x dx$

5) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{4 - x^2} dx$

www.elsolucionario.org

Volumen de Sólidos de Revolución

Hay sólidos que para hallar su área o volumen tienen formulas fijas tales como: 1) Cilindro: $V=\pi r^2 h$; $Al=2\pi rh$; $At=AL+2B$ 2) Cono: $v=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ 3) Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Otras de las aplicaciones de las integrales es que permiten encontrar el volumen de un sólido tridimensional. Estos cuerpos se usan mucho en ingeniería, mecatronica, manufactura. Entre estos encontramos embudos, ejes, píldoras, botellas, pistones, cilindros, conos, esfera.

Método de los Discos

Para encontrar el volumen de un sólido de revolución con el método de los discos usar: a) $v=\pi\int_a^b (R_x)^2\,dx$ cuando el eje de revolución sea horizontal.

b) $v=\pi\int_a^b (R_y)^2\,dy$ cuando el eje de revolución sea vertical.

Ejemplos: encontrar el volumen del sólido formado cuando se hace girar la gráfica y= senx en el intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ Dibujar la gráfica.

$f(x)$=senx en el intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$v=\pi\int_a^b \left[R_{(x)}\right]^2 dx \quad \rightarrow \quad v=\pi\int_0^{\pi/2} sen^2 dx$

Resolviendo la integral $\Rightarrow \int sen^2 dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}senx\cos x$

$$v=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}senx\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$-\left[\frac{1}{2}(0)-\frac{1}{2}sen0\cos 0\right]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}(1)(0)=\frac{\pi}{4}$$

www.elsolucionario.org

Ejemplo 1: Encontrar el volumen del solido formado al girar la región acotada por $f(x)=x^2+2$ ***y la recta g(x)= 3x al rededor de la recta*** $y=\frac{1}{2}$

a) buscando intersección para establecer los limites.

$$R(x)=f(x)-g(x)$$

$$R(x)=x^2-3x+2=(x-2)(x-1);x_1=2\ \hat{}\ x_2=1$$

$$v=\pi\int_a^b\left[R_{(x)}\right]^2dx=\pi\int_1^2\left(x^2-3x+2\right)^2dx=$$

$$v=\pi\int_1^2\left(x^4-6x^3+13x^2-12x+4\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{3}{2}x^4+\frac{13}{3}x^3-6x^2+4x\right]$$

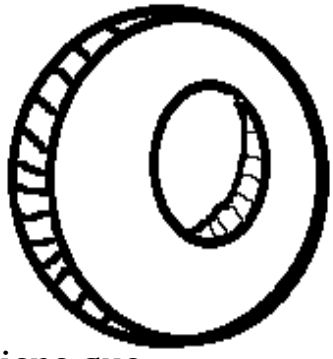
$$=\pi\left[\frac{(2)^5}{5}-\frac{3}{2}(2)^4+\frac{13}{3}(2)^3-6(2)^2+4(2)\right]-\left[\frac{(1)^2}{5}-\frac{3}{2}(1)^4+\frac{13}{3}(1)^3-6(1)^2+4(1)\right]$$

$$=\pi\left[\frac{32}{5}-24+\frac{104}{3}-24+8\right]+\left[-\frac{1}{5}+\frac{3}{2}-\frac{13}{3}+6-4\right]$$

$$=\pi\left[\frac{16}{15}-\frac{31}{30}\right]=\frac{1}{30}\pi$$

$$v=\frac{1}{30}\pi$$

El Método de las Arandelas



Una arandela se forma al hacer girar un rectángulo alrededor del eje, tendrá un hueco en el medio por lo que referente al eje tendrá un radio menor y un radio mayor, es una corona donde está su volumen, es decir

$V=\pi\left(R^2-r^2\right)w$ aplicando integrales se tiene que

$$V=\pi\int_a^b\left[\left(R_{(x)}\right)^2-\left(r_{(x)}\right)^2\right]dx$$

www.elsolucionario.org

Ejemplo 2: encontrar el volumen del solido formado al girar la región intersecada por $y = x \wedge y = x^3$ alrededor del eje x.

la intersección de los graficos de ambas funciones esta en el intervalo $[0,1]$ por lo que ahi es que se va a buscar el volumen cuando la figura formada gire.

$$v=\pi\int_0^1\left[\left(R_{(x)}\right)^2-\left(r_{(y)}\right)^2\right]dx$$

$$v=\pi\int_0^1\left(x^2-x^6\right)dx = v=\pi\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{7}\right]_0^1$$

$$v=\pi\left[\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)-(0)\right]=\pi\left(\frac{4}{21}\right)=\frac{4}{21}\pi$$

Series

Sucesión: es una función cuyo dominio es un subconjunto de los números reales.

Ejemplos: $a_n = 5n-1$

$a_{(1)}=4\,; a_{(2)}=9\,;\ a_{(3)}=14\,;\quad a_{(4)}=19\,;\quad a_{(5)}=24$

Serie: es la suma de los términos de una sucesión.

Ejemplos: $a_{(n)}=1\text{-}x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}+\ldots$

www.elsolucionario.org

Serie de Laurent

Si f(z) no es analítica en un punto $z = z_0$, entonces no podemos aplicar el teorema de Taylor en ese punto; pero si podemos hallar una representación en serie de potencia tanto negativa como positiva de $(z - z_0)$ que representa una singularidad para eso utilizamos el teorema de Laurent.

Teorema: Sea f(z) analítica en un dominio anular $R_1 < Z - Z_0 < R_2$ y sea C un contorno cerrado simple entorno a z_0, orientado positivamente y contenido en dicho dominio, entonces en todo tipo z de la corona o dominio; f(z) admite la representación en serie.

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \frac{\text{parte Analitica}}{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n} + \frac{\text{parte principal}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{bn}{(z - z_0)^n}}$$

a_n ^ bn son coeficientes; $R_1 \langle z - z_0 \langle R_2$ es una corona donde la serie será covergente.

Para conseguir los coeficientes utilizaremos la integral de Cauchy donde

$$1) a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{1+n}} \quad \text{para } (n = 0,1,2,3,4,5,,,)$$

y

$$2) b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{1-n}} \quad \text{para } (n = 1,2,3,4,,,,)$$

podemos decir que

www.elsolucionario.org

$3) C_n = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(Z)dz}{(z-z_0)^{1+n}}$ para $n = 0;\pm 1;\pm 2;\pm 3,,,$

como lo interesante es 2 entonces este integrando tambien lo
podemos expresar como

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{fzdz}{(z-z_0)^{1-n}} = \frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)(z-z_0)^{n-1}dz$$

Convergencia:

como la serie està centrada en z=z_0 definida como $\sum_{-\infty}^{\infty} C_n(z-z_0)^n \Rightarrow$

$(C_n, z_0, z) \in \not\subset$; la convergencia està cetrada en la corona:

1) $(z_0, r_2, r_1) = \{z_0 \in C / R_1 < Z - Z_0 < R_2\}$

Donde $R_1 < R_2$; pero si $R_2 < R_1$ entonces la convergencia esta en el vacio, es lo mismo que decir que la serie es divergente.

los radios se pueden definir como

$$R_1 = \lim_{n\to\infty} \sup |c_{-n}|^{\frac{1}{n}} \qquad \text{y} \qquad R_2 = \lim_{n\to\infty} \sup \frac{1}{|c_n|^{\frac{1}{n}}}$$

Es bueno hacer notar que si la parte principal en la serie de Laurent

se hace cero, es decir si $\sum_{n=1}^{\infty} bn(z-z_0)^{-n} = 0 \Rightarrow$ que la serie es de Taylor

y solo queda la parte analítica $\sum_{n=0}^{\infty} an(z-z_0)^n$ cuya convergencia

es punteado o abierto.

$0|z-z_0|R_2$ ó $-R_1 < |z-z_0| < R_2$ ó $z_0 - R_1 < |z| < R_2 + z_0$

pero si $z_0 = 0$ la serie de Taylor se llama serie de MacLaurin.

www.elsolucionario.org

Empezando con series es bueno recordar que:

$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n$; para $|z|\langle 1$ su desarrollo de sus derivados son

$\int^n(z)=\frac{n!}{(1-z)n+1}: n=0,1,2,3,,,$

$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+\ldots$

para $\frac{1}{1+2}=(-1)^n(z-1)^n$, $|z-1|<1$

$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+z^4-z^5+\ldots$

por lo que si z es por toda potencia es par y se alteran los signos.

$\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-z^6+z^8-z^{10}+\ldots$

Ejemplo: Desarrollar f $(z)\frac{1+2z^2}{z^3+z^5}$ en $|z|<1$

factorizando $f(z)=\frac{1+2z^2}{z^3+z^5}=\frac{1+2z^2}{z^3(1+z^2)}$ por lo que

tendremos $\frac{1}{z^3}\left(\frac{1+2z^2}{1+z^2}\right)\Rightarrow\frac{1+2z^2}{1+z^2}=\frac{2(1+z^2)-1}{1+z^2}$

$\frac{2(1+z^2)}{(1+z^2)}-\frac{1}{(1+z^2)}=2-\frac{1}{1+z^2}$: por lo que

$f(z)=\frac{1}{z^3}\left(2-\frac{1}{1+z^2}\right)$

www.elsolucionario.org

Serie de Taylor

Sea f una función con derivadas de todos los órdenes en el intervalo (a-r, a+r) que es lo mismo $|x-a|<r$. La serie de Taylor en x=a se representa como:

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)(z-a)^2}{2!}+\frac{f'''(a)(z-a)^3}{3!}$$
$$+\frac{f^{IV}(a)(z-a)^4}{4!}+\ldots+\frac{f^{n-1}(a)(z-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

Demostración:

1) sea $f(z)=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+a_3(z-a)^3+a_4(z-a)^4+\ldots$

2) Derivando:

$$f'(z)=a_1+2a_2(z-a)+3a_3(z-a)^2+4a_4(z-a)^3+\ldots$$
$$f''(z)=2a_2+6a_3(z-a)+12a_4(z-a)^2+\ldots$$
$$f'''(z)=6a_3+24a_4(z-a)+\ldots$$
$$f^{IV}(z)=24a_4+\ldots$$

3) Evaluando (2) cuando z=a

$$f(a)=a_0\Rightarrow f(a)$$
$$f'(a)=a_1\Rightarrow f^{I}(a)(z-a)$$
$$f''(a)=2a_2\Rightarrow a_2=\frac{f''(a)}{2!}=\frac{f''(a)}{2}(z-a)^2$$
$$f'''(a)=6a_3\Rightarrow a_3=\frac{f'''(a)}{6}=\frac{f'''(a)}{6}(z-a)^3$$
$$f^{IV}(a)=24a_4\Rightarrow a_4=\frac{f^{IV}(a)}{24}=\frac{f^{IV}(a)}{24}(z-a)^4$$

$$f(z)=f(a)+f'(a)(z-a)+\frac{f''(a)(z-a)^2}{2!}+\frac{f'''(a)(z-a)^3}{3!}$$
$$+\frac{f^{IV}(a)(z-a)^4}{4!}+\ldots+\frac{f^{n-1}(a)(z-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

www.elsolucionario.org

Ejemplo: Encuentra la serie de Taylor para $f(x)=\ln x$ en a=2.

$$f(x)=f(0)+\frac{f^{I}(a)(x-a)}{1!}+\frac{f^{II}(a)(x-a)}{2!}+\frac{f^{III}(a)(x-a)^{3}}{3!}+,,,+$$

$f(x)=\ln x$ .....ln2.....ln2

$f'(x)=\frac{1}{x}=x^{-1}$.....$\frac{1}{2}$.....$\frac{1}{2}$

$f''(x)=-x^{-2}$.....$-\left(\frac{1}{2}\right)^{+2}$.....$-\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$

$f'''(x)=2x^{-3}$.....$2\left(\frac{1}{2}\right)^{+3}$.....$2\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$

$f^{(4)}(x)=-(3)(2)x^{-4}$.....$(-3)(2)\left(\frac{1}{2}\right)^{+4}$.....$-3!\left(\frac{1}{2}\right)^{4}$

$f^{(5)}(x)=4(3)(2)x^{-5}$.....$(4)(3)(2)\left(\frac{1}{2}\right)^{5}$.....$4!\left(\frac{1}{2}\right)^{5}$

$f^{(6)}(x)=-(5)(4)(3)(2)x^{-6}$.....$-5(4)(3)(2)\left(\frac{1}{2}\right)^{6}$.....$-5!\left(\frac{1}{2}\right)^{6}$

$$\ln x=\ln 2+\frac{1}{2}\frac{(x-2)}{1!}+(-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\frac{(x-2)^{2}}{2!}+2\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\frac{(x-2)^{3}}{3}+$$

$$(-1)3!\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\frac{(x-2)^{4}}{4!}+4!\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\frac{(x-2)^{5}}{5!}+(-1)5!\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\frac{(x-2)}{2!}+,,,+$$

Tenemos pues que:

$$\ln x=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\frac{(x-2)^{n}}{n!}(n-1)!$$

$$\ln a=\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-2)^{n}}{2^{n}.n!}$$

www.elsolucionario.org

Serie de MacLaurin

Se cumple cuando a=0. tenemos que:

$$f(x)=\frac{f(0)}{0!}+\frac{f'(0)(x-a)^1}{1!}+\frac{f''(0)(x-a)^2}{2!}+\frac{f'''(0)(x-a)^3}{3!}+,,,+$$

$$f(x)=\frac{f(0)}{0!}+\frac{f'(0)(x-0)^1}{1!}+\frac{f''(0)(x-0)^2}{2!}+\frac{f'''(0)(x-0)^3}{3!}$$

$$f'(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\frac{f'''(0)x^3}{3!}+\frac{f^{IV}(0)x^4}{4!}+,,,+$$

Ejemplo: Hallar la serie de Maclaurin de e^x.

$$f(x)=e^x.$$

$$f(x)=\frac{f(0)}{0!}+\frac{f'(0)x}{1!}+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\frac{f'''(0)x^3}{3!}+,,,+$$

$$f(x)=e^x \Rightarrow f(0)=e^0=1$$

$$f'(x)=e^x \Rightarrow f'(0)=e^0=1$$

$$f''(x)=e^x \Rightarrow f''(0)=e^0=1$$

$$f'''(x)=e^x \Rightarrow f'''(0)=e^0=1$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$$

www.elsolucionario.org

Serie de Fourier

La series de Fourier ha sido uno de los más grandes aportes hecho en el siglo XIX y este ha generado un gran número de trabajos de Investigación y han dado nombre a una de las áreas más importantes del Análisis Matemático, el Análisis de Fourier o Análisis Armónico. Son muchas las cuestiones matemáticas básicas y atractivas que las series de Fourier plantean.

Jean Baptiste Joseph Fourier

El problema de si una función cualquiera puede representarse mediante una serie trigonométrica reaparece más tarde con el matemático francés J. Fourier (1768-1830).

En una memorable sesión de la Academia Francesa de las Ciencias, el día 21 de diciembre de 1807, Fourier presentaba un trabajo que iba a abrir un nuevo capítulo en la historia de la matemática: la creación del Análisis Armónico o, como también se le conoce a partir de sus trabajos, el Análisis
de Fourier.

Fourier había deducido una ecuación que describía la conducción del calor a través de los cuerpos sólidos, la ecuación del calor y un método para resolverla, el método de separación de variables, procedimiento
que, en cierto modo, había sido utilizado ya por Bernoulli para su solución,

www.elsolucionario.org

Aunque es Fourier quien lo empieza a usar de una manera sistemática en la resolución de Ecuaciones en Derivadas Parciales. La aplicación de la técnica de separación de variables a la ecuación del calor, le condujo a escribir la solución en forma de serie trigonométrica.

Aunque la representación de una función en serie trigonométrica se había Considerado antes de Fourier, pero Fourier puso de manifiesto la correspondencia entre función y coeficientes.

Sin embargo, tampoco el trabajo de Fourier fue aceptado a la primera, teniendo como parte del auditorio a matemáticos como J.L. Lagrange (1736-1813), P.S. Laplace (1749-1827) y A.M. Legendre (1752-1833), que criticaron abiertamente la falta de rigor del tratamiento de Fourier. De hecho, Fourier tuvo que rehacer su trabajo ya que su memoria no fue aceptada en un primer momento. No obstante, finalmente sus ideas fueron aceptadas y fueron expuestas, años después, en su obra de 1822, Theorie analytique dela chaleur .

Serie de Fourier. Definición

Sea $f(x)$ una función periodica definida en un intervalo -L $\leq x \leq L$ o $[-L, L]$ tal que $\int_{-L}^{L} f(x)dx$ existe. Entonces $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right]$

Donde:

$a_o = \int_{-L}^{L} f(x)dx$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \;\; ; \;\; \forall n = 1,2,3,4,5...$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx \;\; ; \;\; \forall n = 1,2,3,4,5...$$

www.elsolucionario.org

a_n ^ b_n son coeficientes correspondiente a la función f(x) y al mismo tiempo cumplen las condiciones de Dirichlet para que la serie converja $\Rightarrow$ es posible que se cumpla la identidad de Parseval.

Funciones pares e impares:

Decimos que una función f(x) es par si f (-x) = f(x).

Decimos que un función f(x) es impar si f (-x) = -f(x)

Propiedades:

- El producto de dos funciones pares es par
- El producto de dos funciones impares es par
- El producto de una función par por una impar es impar.
- Si f (x) es par $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{2} f(x)dx$
- Si f (x) es impar $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Desarrollo en serie de Fourier de una función par:

Sea f (x) una función par. Vamos a calcularle su serie de Fourier en el intervalo [-L, L]:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = [f(es, par)] = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx$$ Por ser f (x) y cos(x)

www.elsolucionario.org

$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) sen\frac{n\pi}{L} x dx = 0$ Por ser el producto de una función par f (x) por una impar (sin x) una función impar. Luego $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{L}$

Es decir, la serie de Fourier de una función par en el intervalo [-L, L] es una serie en la que solo aparecen Cosenos.

Desarrollo en serie de Fourier de una función impar:

Haciendo cálculos análogos se obtiene $a_0 = a_n = 0$

Es decir, la serie de Fourier de una función impar en el intervalo [-L, L] es una serie en la que solo aparecen senos.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen\frac{n\pi}{L}$$

Ejemplo: Calcular la serie de fourier de $f(x) = x$ en el intervalo $-\pi \le x \le \pi$.

Procedemos a buscar los coeficientes:

i) $a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right\}$

$\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\pi^2}{2} - \frac{(-\pi)^2}{2}\right\} = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{2}\right\} = 0 \therefore a_0 = 0$

www.elsolucionario.org

ii) $a_n = ?$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos\left(\frac{n\pi x}{\pi}\right)dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{1}{n^2}\cos(nx)+\frac{1}{n}xsen(nx)\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left(\frac{1}{n^2}\cos n\pi+\frac{1}{n}xsen(n\pi)\right)\right]-\left(\frac{1}{n^2}\cos(-n\pi)+\frac{1}{n}\pi sen(-n\pi)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos n\pi+\frac{x}{n}sennn\pi-\right]\left(\frac{1}{n^2}\cos(n\pi)-\frac{x}{n}sen(n\pi)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos(n\pi)+\frac{x}{n}\pi sen(n\pi)-\frac{1}{n^2}\cos(n\pi)+\frac{x}{n}sen(n\pi)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2x}{n}\pi sennn\pi\right] \text{ : como } n = 1,2,3,,,$$

$$= \frac{1}{\pi}2xsen\pi = \frac{1}{\pi}(0) = \ a_n = 0$$

iii) $b_n = ?$

como $f(x) = x$ es una función impar tendremos que

$a_0;\ a_n = 0$ y $b_n = ?;$ pero como

$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$ es equivalente decir

$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx$; esto significa que la serie de fourier

de una función impar es una serie infinita de funciones

seno. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

www.elsolucionario.org

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x sen(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x sen(nx)\,dx$$

Integrando por parte

$$\frac{2}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} x sen(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\right\}\left\{\left[\frac{1}{n^2} sen(n\pi) - \frac{x}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi}\right\}$$

evaluando:

$$\frac{2}{\pi}\left\{\left(\frac{1}{n^2} sen(n\pi) - \frac{\pi}{n}\cos(n\pi)\right) - \left(\frac{1}{n^2} sen0 - \frac{0}{n}\cos 0\right)\right\}$$

$$\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{n^2} sen(n\pi) - \frac{\pi}{n}\cos(n\pi) - \frac{1}{n^2} sen0 + \frac{0}{n}\cos 0\right\}$$

$$\frac{2}{\pi}\left\{-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi)\right\} = -\frac{2\pi}{n\pi}\cos n\pi = -\frac{2}{n}\cos(n\pi)$$

$$\therefore$$

$$b_n = -\frac{2}{n}\cos(n\pi)$$

iiii) pero! cuál es la bendita serie?

como ya dijimos que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

$$b_n = -\frac{2}{n}\cos(n\pi) = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}(-1)^{n+1}.sen(nx)\right)$$

Haciendo algunas evaluaciónes para ver la serie $\forall_n = 1,2,3,4,5,6,,,$

$$f(x) = 2senx - sen(2x) + \frac{2}{3} sen3x - \frac{1}{2} sen4x + \ldots$$

www.elsolucionario.org

2. Encuentre la serie de Fourier para $f(x)=x$; $[0,2]$

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$a_0=\frac{1}{2}\int_0^2 x dx \Rightarrow a_0=\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \Rightarrow a_0=\frac{1}{2}\left[\frac{2^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right]\Rightarrow\frac{1}{2}(2)\Rightarrow[a_0=1]$$

$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx \Rightarrow a_n=\int_0^2 x\cos(\frac{n\pi x}{2})dx$$

Integrando por parte: $\int x\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\left[\frac{2x}{n\pi}\sin(\frac{n\pi x}{2})+\frac{4}{(n\pi)^2}\cos(\frac{n\pi x}{2})\right]$

Evaluando: $a_n=\left[\frac{2x}{n\pi}\sin(\frac{n\pi x}{2})+\frac{4}{(n\pi)^2}\cos(\frac{n\pi x}{2})\right]_0^2$

$$a_n=\left[\frac{4}{n\pi}\sin(n\pi)+\frac{4}{(n\pi)^2}\cos(n\pi)\right]-\left[\frac{0}{n\pi}\sin(0)+\frac{4}{(n\pi)^2}+\cos(0)\right]$$

$$a_n=\frac{4}{(n\pi)^2}\cos(n\pi)-\frac{4}{(n\pi)^2}$$

$$a_n=\frac{4}{(n\pi)^2}(-1)^n-\frac{4}{(n\pi)^2}$$

Función par $\therefore\ b_n=0$

La serie de Fourier es:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(\frac{n\pi}{L}))=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{(n\pi)^2}(-1)^n-\frac{4}{(n\pi)^2}\right]\cos\frac{n\pi}{2}$$

www.elsolucionario.org

3. Encuentre la serie de Fourier para $f(x)=x^2-x+2;\ [0,2]$

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L})$$

$$a_0=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\left[x^2-x+3\right]\rightarrow a_0=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x\right]_{-2}^{2}$$

Evaluando:

$$a_0=\frac{13}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}[x^2-x+3]\cos(\frac{n\pi x}{2})dx$$

Integrando por parte:

$$a_n=\frac{1}{2}[\frac{2x^2}{n\pi}\sin(\frac{n\pi x}{2})+\frac{8x}{(n\pi)}\cos(\frac{n\pi x}{2})$$

$$-\frac{16}{(n\pi)^3}\sin(\frac{n\pi x}{2})-\frac{2x}{n\pi}\sin(\frac{n\pi x}{2})-\frac{4}{(n\pi)^2}\cos(\frac{n\pi x}{2})+\frac{6}{n\pi}\sin(\frac{n\pi x}{2})]_{-2}^{2}$$

Evaluando:

$$a_n=\frac{16n\pi\cos(n\pi)-16\sin(n\pi)+14(n\pi)^2\sin(n\pi)}{(n\pi)^3}$$

$$b_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}[x^2-x+3]\sin(\frac{n\pi x}{2})dx$$

Integrando por parte:

$$b_n=\frac{1}{2}\left[\frac{-2x^2}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{2})+\frac{8}{(n\pi)^2}\sin(\frac{n\pi x}{2})+\frac{16}{(n\pi)^3}\sin(\frac{n\pi x}{2})+\frac{2x}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{2})-\frac{4}{(n\pi)^2}\sin(\frac{n\pi x}{2})-\frac{6}{n\pi}\cos(\frac{n\pi x}{2})\right]_{-2}^{2}$$

www.elsolucionario.org

Evaluando: $b_n = \dfrac{16n\pi\cos(n\pi) - 8\sin(n\pi)}{(n\pi)^2}$

La serie de Fourier es:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(\frac{n\pi x}{L}) + b_n\sin(\frac{n\pi x}{L}))$$

$$f(x) = \frac{13}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\left[\dfrac{16n\pi\cos(n\pi) - 16\sin(n\pi) + 14(n\pi)^2\sin(n\pi)}{(n\pi)^3}\cos(\frac{n\pi x}{2})\right] + \\ [\dfrac{16n\pi\cos(n\pi) - 8\sin(n\pi)}{(n\pi)^2}\sin(\frac{n\pi x}{2})]\end{array}\right\}$$

Como, $\sin(n\pi)=0$, entonces:

$$f(x) = \frac{13}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{16\cos(n\pi)}{(n\pi)^2}\cos(\frac{n\pi x}{2})\right] + \left[\frac{8\cos(n\pi)}{n\pi}\sin(\frac{n\pi x}{2})\right]\right\}$$

www.elsolucionario.org

Cálculo Integral

Práctica: 11

Apellidos:…….…… Matrículas:…….

Grupo: ……Fecha: …….……Profesor(a): ……..……

1) Encontrar el volumen del solido formado cuando y=cosx en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ gira al rededor del eje de las X.

2) Encontrar la serie de

y = cosx en a=0

y = lnx en a=5

3) Encontrar la serie de fourier en f $(x) = x^2$ en el metodo de $[-l, l]$.

www.elsolucionario.org

Bibliografía

1. Spieguel, Murray R. (2007). Variable Compleja. Mexico: Ed. McGraw-Hill

2. Churchill, Ruel V ; Brown, James Brown. (1998). Variable compleja y aplicaciones. Quinta edición. Chile. Editora: McGraw-Hill.

3. James, Glyn. (2002). Matemáticas avanzada para ingeniería. Segunda edición. México. Editora: Pearson educación. 480 pág.

4. Kudriavtsed, V.A; Demidovich B.P. (1989). Breve Curso de matematicas superiores. Primera edición. URSS: Editorial mir (editora de libros sovieticos).

5. Spieguel, Murray R. (1975). Matematicas superiores para ingeniero y científicos. Primera edición. Mexico.Editora: McGraw-Hill. Impreso en colombia.

6. Courant, Richard; Jonh, Fritz Blank, Albert A; Salomon, Alan. (1995). Introducción al cálculo y Analisis matematico (vol.2). Novena Reimpresion. Mexico: Editorial Limusa, S.A. Paginas: 1145.

7. Sobel Max; Lerner Norbert, (2006). Precálculo. 6ta edición, México: editora Pearson Educación.

8. Thomas, J.(2006). Calculo de varias variables. Undécima edición. México: Editora person.

9. Larson, R; Hostetler, B.; Edwards, B. (1999). Cálculo y Geometría Analítica. Vol. 2. Sexta Edición. Madrid: McGraw-Hill.

www.elsolucionario.org

10. Purcelkl, E.; Varberg, B.; Rigdon, S. (2007). Calculo. 9na edicion. Mexico: Person.

11. Pasaye, J. J. (s.f.). Analisis en el Dominio de la Frencuencia.

12. Tadeo, E. (04 de 12 de 2009). *emmanueltadeo.wordpress.com*. Obtenido de http://emmanueltadeo.wordpress.com/tag/series-de-fourier/

13. Stewart, J. (2008). Calculo de varias variables. 6ta edición. Mexico: Cengage Learning.

14. Stewart, J. (2008). Calculo de una variable Trascendente temprana. 6ta ediccion. México: Cengage Learning.

15. Agradecimiento y toma de notas de mi maestro Gill Sandro Gomez, prof. de matemáticas de la UASD.

16. Gonzalies-Davila, J. (s.f.). Matematicas y Musica.

17. Catedras del prof. Ing.Samuel David Ramirez Angomas

18. http://www.youtube.com/watch?v=1W2SBMzlVYchttp://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_fundamental_del_c%C3%A1lculo

19. http://www.mat.uson.mx/eduardo/calculo2/capitulo4PDF.pdf

20. http://es.wikipedia.org

21. Libro: Métodos Numéricos para Ingeniería, Ing. Ricardo Seminario Vásquez

22. http://www.tonahtiu.com

www.elsolucionario.org

23. http://es.scribd.com/doc/64212058/15/Metodo-de-la-Parabola-de-Segundo-Grado

24. http://zip.rincondelvago.com/parabola

25. http://html.rincondelvago.com/parabolas-

26. matematicas.html

27. http://es.wikipedia.org/wiki/Par%C3%A1bola_(matem%C3%A1tica)#Aplicaciones_pr.C3.A1cticas

28. buenastareas. (27 de 03 de 2012). *buenastareas*. Recuperado el 27 de 03 de 2012, de www.buenastareas.com

29. Larson, H. E. (2012). *Cálculo y Geometria Analitica* (Sexta Edición ed., Vol. 1). Santo Domingo, Republica dominicana: .

30. *Wikia*. (s.f.). Recuperado el 24 de 03 de 2012, de http://matematica.wikia.com/wiki/Valor_absoluto

31. *Wikipedia*. (09 de 03 de 2012). Recuperado el 25 de 03 de 2012, de http://es.wikipedia.org/wiki/Valor_absoluto

La portada fue realizada por Adner de Los Santos.

Revisado el 18 de Enero del 2014

Argentera

www.elsolucionario.org